Componenti connesse degli aperti di $\mathbb{R}^n$

Cor. *X connesso e loc. cpa $\Rightarrow$ X cpa.*

Prop. *X loc. cpa e II-numerabile $\Rightarrow$ $\mathcal{P}(X) = \mathcal{C}(X)$ numerabile.*

Dim. X è unione topologica delle componenti cpa e queste sono aperte.
$\forall\, P \in \mathcal{P}(X)$ scegliamo $a_P \in P$ (assioma della scelta).
$A := \{a_P \mid P \in \mathcal{P}(X)\} \subset X$ sottospazio discreto $\Rightarrow$ A è $\underset{\text{proprietà ereditaria}}{II\text{-numerabile}}$ $\Rightarrow$
$A \cong \mathcal{P}(X)$ al più numerabile $\Rightarrow$ $\mathcal{P}(X)$ al più numerabile. □

Oss. $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto $\Rightarrow$ U loc. cpa. $\forall\, x \in U\ \exists\, r_x > 0$ t.c. $B(x, r_x) \subset U$ $\Rightarrow$ $\mathcal{J}_x = \{B(x,r) \mid 0 < r < r_x\}$ base di intorni aperti convessi quindi cpa.

Cor. *$U \subset \mathbb{R}^n$ aperto $\Rightarrow$ U unione numerabile di aperti disgiunti e connessi per archi e $\mathcal{P}(U) = \mathcal{C}(U)$.*

Teor. *$X \subset \mathbb{R}$ connesso $\Leftrightarrow$ X è un punto o un intervallo $\Leftrightarrow$ $X \subset \mathbb{R}$ cpa.*

Dim. I punti e gli intervalli sono cpa quindi connessi. Resta da dimostrare che $X \subset \mathbb{R}$ connesso e $\# X > 1$ $\Rightarrow$ X intervallo.
Per assurdo, supponiamo che $\exists\, a < b < c$ t.c. $a, c \in X$ e $b \notin X$ $\Rightarrow$
$a \in U := \,]-\infty, b[\cap X = \,]-\infty, b] \cap X$ aperto e chiuso non vuoto in X t.c. $c \notin U$ $\Rightarrow$ X sconnesso, contraddizione. □

Teor (dei valori intermedi)**.** *$f\colon X \to \mathbb{R}$ continua non costante con X connesso $\Rightarrow$ $f(X)$ intervallo.*

Cor. *$U \subset \mathbb{R}$ aperto $\Leftrightarrow$ U unione numerabile di intervalli aperti disgiunti.*

Lem. *$f : [a,b] \to [c,d]$ continua e biiettiva $\Rightarrow$ $f(\{a,b\}) = \{c,d\}$.*

Dim. Per assurdo, $c < f(a) < d$ $\Rightarrow$ $f(]a,b]) = [c, f(a)[\cup]f(a), d]$ connesso, contraddizione. Analogamente per $f(b)$. □

Teor. *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e biiettiva $\Rightarrow$ f omeomorfismo.*

Dim. $\forall\, a < b$ $\Rightarrow$ $f([a,b]) = [c,d]$ $\Rightarrow$ $f(]a,b[) =]c,d[$ $\Rightarrow$ f aperta. □

N.B. $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua e biiettiva $\Rightarrow$ f omeomorfismo, ma non abbiamo gli strumenti per dimostrarlo se $n \geqslant 2$.

Omotopia

X, Y spazi topologici, $I = [0, 1]$.

Def. Un'*omotopìa* da X a Y è un'applicazione continua $H \colon X \times I \to Y$.

$H \colon X \times I \to Y \rightsquigarrow h_s \colon X \to Y$, $h_s(x) := H(x, s)$, $\forall\, x \in X$, $\forall\, s \in I$.

N.B. Assumeremo *continue* tutte le applicazioni tra spazi topologici.

Def. $f, g \colon X \to Y$ sono *omòtope* se $\exists\, H \colon X \times I \to Y$ t.c. $h_0 = f$ e $h_1 = g$. Se f e g sono omotope scriviamo $f \simeq g$.

Oss. $f \simeq g \Leftrightarrow \exists\, H \colon X \times I \to Y$ t.c. $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$, $\forall\, x \in X$. Durante l'omotopia f si "deforma" in g in modo continuo.

Oss. Un'omotopia $H \colon X \times I \to Y$ è un cammino nello spazio delle applicazioni continue $C(X, Y) := \{f \colon X \to Y \mid f \text{ continua}\}$.

Def. $f, g \colon X \to Y$ sono *omotope relativamente ad* $A \subset X$ se $f|_A = g|_A$ e $\exists\, H \colon X \times I \to Y$ t.c. $h_0 = f$, $h_1 = g$ e $h_s|_A = f|_A$, $\forall\, s \in I$.
Scriviamo $f \simeq_A g$ oppure $f \simeq g$ (rel A).

Oss. $f \simeq_A g \Leftrightarrow \exists\, H \colon X \times I \to Y$ t.c. $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$, $\forall\, x \in X$, e $H(x, s) = f(x)$, $\forall\, x \in A$, $\forall\, s \in I$.
Durante l'omotopia relativa f si "deforma" in g senza modifiche su $A \subset X$.

Per le omotopie consideriamo le operazioni tra cammini.

Def.

1) $f \colon X \to Y \rightsquigarrow H_f \colon X \times I \to Y$, $H_f(x, s) \overset{\text{def}}{=} f(x)$ *omotopia stazionaria*.

2) $H \colon X \times I \to Y \rightsquigarrow \bar{H} \colon X \times I \to Y$ *omotopia inversa*

$$\bar{H}(x, s) \overset{\text{def}}{=} H(x, 1 - s).$$

3) $H, K \colon X \times I \to Y$ t.c. $h_1 = k_0 \colon X \to Y \rightsquigarrow$

$$H * K \colon X \times I \to Y \text{ concatenazione di } H \text{ e } K$$

$$(H * K)(x, s) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} H(x, 2s), & 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2} \\ K(x, 2s - 1), & \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$

Oss. $\simeq$ e $\simeq_A$ sono relazioni d'equivalenza su $C(X, Y)$.

Oss. $f_0 \overset{F}{\simeq} f_1 \colon X \to Y$ e $g_0 \overset{G}{\simeq} g_1 \colon Y \to Z \Rightarrow g_0 \circ f_0 \overset{H}{\simeq} g_1 \circ f_1$
($\simeq$ è *compositiva*) $H(x, s) = G(F(x, s), s)$.

Def. $f \colon X \to Y$ è un'*equivalenza omotopica* tra X e Y se $\exists\, g \colon Y \to X$ t.c. $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ e $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$. g è detta *inversa omotopica* di f.

N.B. L'inversa omotopica se esiste non è necessariamente unica, né iniettiva, né suriettiva.

Def. Diciamo che X e Y sono *omotopicamente equivalenti* o che *hanno lo stesso tipo d'omotopia* se $\exists\, f \colon X \to Y$ equivalenza omotopica, $X \simeq Y$.

Oss. $f \colon X \to Y$ omeomorfismo $\Rightarrow f$ equivalenza omotopica con inversa omotopica $f^{-1} \colon Y \to X$. Quindi $X \cong Y \Rightarrow X \simeq Y$.

Oss. $\simeq$ relazione d'equivalenza tra spazi topologici più debole di omeo.

N.B. Indichiamo un punto o uno spazio puntiforme non specifico con $*$.

Def. Uno spazio top. è *contraibile* se ha il tipo d'omotopia di un punto.

Oss. In altre parole X contraibile $\Leftrightarrow X \simeq *$.

Prop. *X contraibile $\Leftrightarrow \mathrm{id}_X \simeq$ costante.*

In inglese un'applicazione omotopa a costante è detta *null-homotopic*.

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ $j: X \to *$ equivalenza omotopica, $i: * \to X$ inversa omotopica di $j \Rightarrow \mathrm{id}_X \simeq i \circ j =$ costante.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\mathrm{id}_X \simeq c: X \to X$ costante, $c(x) = x_0$, $\forall\, x \in X \rightsquigarrow i: \{x_0\} \to X$, $i(x_0) = x_0$, $j: X \to \{x_0\} \Rightarrow j \circ i = \mathrm{id}_{\{x_0\}}$, $i \circ j = c \simeq \mathrm{id}_X \Rightarrow j$ equivalenza omotopica $\Rightarrow X \simeq \{x_0\}$. □

Esempio. $U \subset \mathbb{R}^n$ convesso $\Rightarrow U$ contraibile: scegliamo $u_0 \in U \rightsquigarrow$
$H: U \times I \to U$, $H(x, s) = (1-s)x + su_0 \Rightarrow h_0 = \mathrm{id}_U$, $h_1 = u_0$.
$\mathbb{R}^n$, B^n e I^n contraibili.

Prop. *X contraibile $\Rightarrow X$ connesso per archi.*

Dim. $H: X \times I \to X$ t.c. $h_0 = x_0$ costante e $h_1 = \mathrm{id}_X$. $\forall\, x \in X \rightsquigarrow \gamma_x: I \to X$, $\gamma_x(t) = H(x, t) \Rightarrow \gamma_x(0) = x_0$, $\gamma_x(1) = x \Rightarrow X$ cpa. □

Def. $r: X \to A$ è una *retrazione* continua se $A \subset X$ e $r|_A = \mathrm{id}_A$.

Def. $H: X \times I \to X$ *(retrazione per) deformazione forte* (risp. *debole*) di X su $A \subset X$ se:

1) $h_0 = \mathrm{id}_X$

2) $h_s|_A = \mathrm{id}_A$, $\forall\, s \in I$ (risp. per $s = 1$)

3) $h_1(X) = A$.

X si retrae per deformazione su A e scriviamo $X \searrow A$ se $\exists\, H$ deformazione.

Oss. Nell'esempio precedente H è retrazione per deformazione forte del convesso U su un suo punto.

Oss. H deformazione di X su $A \Rightarrow r := h_1|: X \to A$ retrazione.

Oss. X contraibile $\Leftrightarrow X$ ammette deformazione debole su un punto.

Oss. $X \searrow A \Rightarrow i_A: A \overset{\simeq}{\hookrightarrow} X$ ha inversa omotopica $r: X \overset{\simeq}{\to} A \Rightarrow X \simeq A$.

Oss. Retrazione per deformazione = omotopia tra id_X e retrazione.