Teorema di sollevamento dei cammini

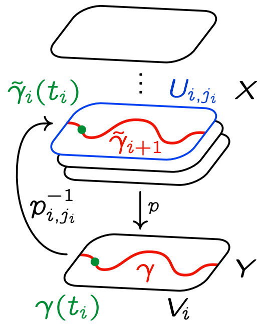
Teor. *$p\colon X \to Y$ rivestimento. $\forall\, \gamma\colon I \to Y$ continua, con $\gamma(0) = y_0$, $\forall\, x_0 \in p^{-1}(y_0) \Rightarrow \exists!\, \tilde\gamma_{x_0}\colon I \to X$ sollevamento di γ t.c. $\tilde\gamma_{x_0}(0) = x_0$.*

Dim. J fibra di p. $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ricoprimento di Y con aperti banalizzanti p. $\{\gamma^{-1}(V_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ ricoprimento aperto di $I \rightsquigarrow \delta > 0$ numero di Lebesgue $\rightsquigarrow 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ suddivisione di I t.c. $t_i - t_{i-1} < \delta \Rightarrow \gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset V_{\alpha_i} =: V_i$ per un certo $\alpha_i \in A \Rightarrow \gamma(t_i) \in V_{i-1} \cap V_i$, $i \geqslant 1$.

$$p^{-1}(V_i) = \bigsqcup_{j\in J} U_{i,j}, \qquad p_{i,j} := p|_{U_{i,j}} : U_{i,j} \xrightarrow{\cong} V_i, \qquad U_{i,j} \text{ fogli di } p$$

$\boxed{\textit{Esistenza}}$ Def. ricorsiva: $\tilde\gamma_i : [0, t_i] \to X$ t.c. $\tilde\gamma_i(0) = x_0$, $p \circ \tilde\gamma_i = \gamma|_{[0,t_i]}$. $\tilde\gamma_0\colon \{0\} \to X$, $\tilde\gamma_0(0) := x_0$. Supponiamo di aver definito $\tilde\gamma_i \Rightarrow \exists!\, j_i \in J$ t.c. $\tilde\gamma_i(t_i) \in U_{i,j_i}$ dato che $\gamma(t_i) \in V_i$.

$$\tilde\gamma_{i+1} := \begin{cases} \tilde\gamma_i, & \text{su } [0, t_i] \\ p_{i,j_i}^{-1} \circ \gamma, & \text{su } [t_i, t_{i+1}]. \end{cases}$$



$p_{i,j_i}(\tilde\gamma_i(t_i)) = p(\tilde\gamma_i(t_i)) = \gamma(t_i) \Rightarrow \tilde\gamma_i(t_i) = p_{i,j_i}^{-1}(\gamma(t_i)) \Rightarrow$ $\tilde\gamma_{i+1}$ continua. $\tilde\gamma_{i+1}$ sollevamento di γ su $[0, t_{i+1}]$ t.c. $\tilde\gamma_{i+1}(0) = x_0 \rightsquigarrow \tilde\gamma_{x_0} := \tilde\gamma_n$.

$\boxed{\textit{Unicità}}$ $\forall\, \tilde\gamma'$ sollevamento continuo t.c. $\tilde\gamma'(0) = x_0$. Per induzione se $\tilde\gamma' = \tilde\gamma_i$ su $[0, t_i] \Rightarrow \tilde\gamma'([t_i, t_{i+1}]) \subset U_{i,j_i}$ perché $\tilde\gamma'([t_i, t_{i+1}])$ connesso $\Rightarrow$ $p_{i,j_i} \circ \tilde\gamma' = \gamma$ su $[t_i, t_{i+1}] \Rightarrow \tilde\gamma' = p_{i,j_i}^{-1} \circ \gamma = \tilde\gamma$ su $[t_i, t_{i+1}] \Rightarrow \tilde\gamma' = \tilde\gamma_{x_0}$. $\square$

Oss. γ cappio $\Rightarrow \tilde\gamma_{x_0}$ cammino non necessariamente cappio.

Esempio. $p\colon \mathbb{R} \to S^1$, $p(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$
$\gamma : I \to S^1$, $\gamma(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) = p(t) \Rightarrow \tilde\gamma_0(t) = t$

Omotopie di cammini e di cappi

$I^2 = I \times I \subset \mathbb{R}^2$ *quadrato unitario* con coordinate $(t, s) \in I^2$.

$$H\colon I^2 \to X \quad \text{continua}$$
$$(t, s) \mapsto H(t, s) =: h_s(t)$$
$$\gamma_0 := h_0, \ \ \gamma_1 := h_1$$

Def. $H\colon I^2 \to X$ è detta *omotopia*

di cammini $\overset{\text{def}}{\iff}$ H rel $\{0, 1\}$: $h_s(0) = x_0$, $h_s(1) = x_1$, $\forall\, s \in I$. $\gamma_0 \sim \gamma_1$.

di cappi $\overset{\text{def}}{\iff}$ H rel $\{0, 1\}$: $h_s(0) = h_s(1) = x_0$, $\forall\, s \in I$. $\gamma_0 \sim \gamma_1$.

libera di cappi $\overset{\text{def}}{\iff}$ h_s cappio: $h_s(0) = h_s(1)$, $\forall\, s \in I$.

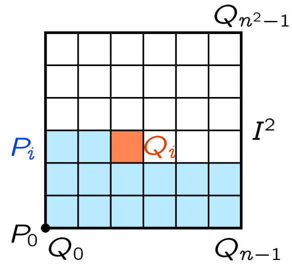
Teorema di sollevamento delle omotopie

Teor. *$p\colon X \to Y$ rivestimento. $\forall\, H\colon I^2 \to Y$ continua, con $H(0,0) = y_0$, $\forall\, x_0 \in p^{-1}(y_0) \Rightarrow \exists!\, \tilde{H}\colon I^2 \to X$ sollevamento di H t.c. $\tilde{H}(0,0) = x_0$. Inoltre H rel $\{0,1\} \Rightarrow \tilde{H}$ rel $\{0,1\}$.*

Dim. L'idea è simile al caso dei cammini e manteniamo la notazione. $\{H^{-1}(V_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ ricoprimento aperto di $I^2 \rightsquigarrow \delta > 0$ numero di Lebesgue $\rightsquigarrow 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ suddivisione di I t.c. $t_i - t_{i-1} < \dfrac{\delta}{\sqrt{2}}$.
Numeriamo i rettangoli $[t_i, t_{i+1}] \times [t_k, t_{k+1}]$ secondo l'ordine lessicografico

$$(i,k) < (i',k') \Leftrightarrow k < k' \text{ oppure } k = k' \text{ e } i < i' \rightsquigarrow Q_0, \dots, Q_{n^2-1}$$

$\operatorname{diam} Q_i < \delta \Rightarrow H(Q_i) \subset V_i$.



$$P_0 := \{(0,0)\}$$

$$P_i := \bigcup_{k=0}^{i-1} Q_k \Rightarrow T_i := P_i \cap Q_i = \begin{cases} 1 \text{ vertice } (i=0) \\ 1 \text{ lato} \\ 2 \text{ lati consecutivi} \end{cases}$$

$T_i \neq \emptyset$ connesso per archi.

$\boxed{\text{Esistenza}}$ Def. ricorsiva: $\tilde{H}_i\colon P_i \to X$ t.c. $\tilde{H}(0,0) = x_0$, $p \circ \tilde{H}_i = H|_{P_i}$.
$\tilde{H}_0\colon P_0 \to X$, $\tilde{H}_0(0,0) := x_0$. Supponiamo di aver definito $\tilde{H}_i \Rightarrow \exists!\, j_i \in J$ t.c. $\tilde{H}(T_i) \subset U_{i,j_i}$ dato che $H(T_i) \subset H(Q_i) \subset V_i$ e T_i connesso.

$$\tilde{H}_{i+1} := \begin{cases} \tilde{H}_i, & \text{su } P_i \\ p_{i,j_i}^{-1} \circ H, & \text{su } Q_i. \end{cases}$$

$p_{i,j_i} \circ \tilde{H}_i|_{T_i} = p \circ \tilde{H}_i|_{T_i} = H|_{T_i} \Rightarrow \tilde{H}_i|_{T_i} = p_{i,j_i}^{-1} \circ H|_{T_i} \Rightarrow \tilde{H}_{i+1}$ continua.
$\tilde{H}_{i+1}$ sollevamento di H su P_{i+1} t.c. $\tilde{H}_{i+1}(0,0) = x_0 \rightsquigarrow \tilde{H} := \tilde{H}_{n^2}$.

$\boxed{\text{Unicità}}$ $\forall\, \tilde{H}'$ sollevamento continuo t.c. $\tilde{H}'(0,0) = x_0$. Per induzione se $\tilde{H}' = \tilde{H}_i$ su $P_i \Rightarrow \tilde{H}'(Q_i) \subset U_{i,j_i}$ perché $\tilde{H}'(Q_i)$ connesso $\Rightarrow$
$p_{i,j_i} \circ \tilde{H}' = H$ su $Q_i \Rightarrow \tilde{H}' = p_{i,j_i}^{-1} \circ H = \tilde{H}$ su $Q_i \Rightarrow \tilde{H}' = \tilde{H}$.

$\boxed{\text{Rel } \{0,1\}}$ $H(\{0\} \times I) = y_0 \Rightarrow \tilde{H}(\{0\} \times I) \subset p^{-1}(y_0)$.
$x_0 \in \tilde{H}(\{0\} \times I)$ connesso e $p^{-1}(y_0)$ discreto $\Rightarrow \tilde{H}(\{0\} \times I) = x_0$.
Analogamente si ha $\tilde{H}(\{1\} \times I) = x_1$, con $p(x_1) = y_1 = H(\{1\} \times I)$. $\square$