Gruppo fondamentale

Def. Uno *spazio puntato* (X, x_0) è uno spazio topologico X con un *punto base* $x_0 \in X$. Un'applicazione tra spazi puntati $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ è un'applicazione $f\colon X \to Y$ t.c. $f(x_0) = y_0$.

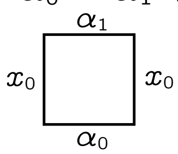
Def. Lo *spazio dei cappi* di (X, x_0) è

$$\Omega(X, x_0) \overset{\text{def}}{=} \{\alpha\colon I \to X \mid \alpha \text{ continua e } \alpha(0) = \alpha(1) = x_0\}.$$

$\gamma_{x_0}\colon I \to X$, $\gamma_{x_0}(t) = x_0$, $\forall\, t \in I$ è detto *cappio banale*.

<u>Relazione d'equivalenza su $\Omega(X, x_0)$:</u> omotopia di cappi $\sim$

$$\forall\, \alpha_0, \alpha_1 \in \Omega(X, x_0),\ \ \alpha_0 \sim \alpha_1 \Leftrightarrow \exists\, H\colon I^2 \to X \quad \text{omotopia rel } \{0, 1\}$$



$$h_0 = \alpha_0,\ \ h_1 = \alpha_1$$
$$h_s(0) = h_s(1) = x_0,\ \ \forall\, s \in I.$$

$[\alpha]$ *classe di equivalenza* di $\alpha \in \Omega(X, x_0)$.

Def. Il *gruppo fondamentale* di (X, x_0) è l'insieme quoziente

$$\pi_1(X, x_0) \overset{\text{def}}{=} \Omega(X, x_0)/\!\sim\, = \{[\alpha] \mid \alpha \in \Omega(X, x_0)\}.$$

Teor. *$\pi_1(X, x_0)$ è un gruppo rispetto all'operazione binaria*

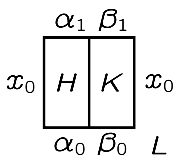
$$[\alpha][\beta] \overset{\text{def}}{=} [\alpha * \beta],\ \ \forall\, [\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0).$$

L'elemento neutro è $1 = [\gamma_{x_0}]$ e si ha $[\alpha]^{-1} = [\bar{\alpha}]$.

Dim. $\boxed{[\alpha][\beta] \text{ Ben definito}}$ Mostriamo che non dipende dai rappresentanti.

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 \overset{H}{\sim} \alpha_1 \quad &\rightsquigarrow \quad H\colon I^2 \to X \\ \beta_0 \overset{K}{\sim} \beta_1 \quad &\rightsquigarrow \quad K\colon I^2 \to X \end{aligned}\right\} \text{ omotopie rel}\, \{0, 1\}.$$

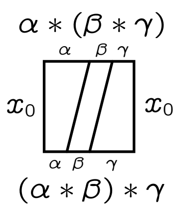
$$L\colon I^2 \to X \quad L(t, s) = \begin{cases} H(2t, s), & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ K(2t - 1, s), & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$



$$\alpha_0 * \beta_0 \sim \alpha_1 * \beta_1 \Rightarrow [\alpha_0][\beta_0] = [\alpha_1][\beta_1]$$

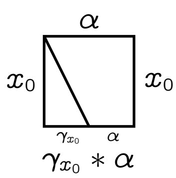
$\boxed{\text{Proprietà associativa}}$

$$\begin{aligned} [\alpha]([\beta][\gamma]) &= [\alpha * (\beta * \gamma)] = [(\alpha * \beta) * \gamma] \\ &= ([\alpha][\beta])[\gamma] \end{aligned}$$



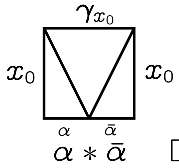
$\boxed{\text{Elemento neutro}}$

$$[\gamma_{x_0}][\alpha] = [\gamma_{x_0} * \alpha] = [\alpha]$$
$$[\alpha][\gamma_{x_0}] = [\alpha * \gamma_{x_0}] = [\alpha]$$



Inverso

$$[\alpha][\alpha]^{-1} = [\alpha * \bar{\alpha}] = [\gamma_{x_0}]$$
$$[\alpha]^{-1}[\alpha] = [\bar{\alpha} * \alpha] = [\gamma_{x_0}]$$



□

Oss. Analoghe proprietà algebriche valgono anche per prodotti di cammini (quando il prodotto è definito). La dimostrazione è la stessa.

Oss. $\pi_1(\{x_0\}, x_0) = 0$ (l'unico cappio è quello banale).

Funtorialità.

Def. Data $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ continua definiamo l'*omomorfismo indotto*

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$
$$f_*([\alpha]) \stackrel{\text{def}}{=} [f \circ \alpha]$$

Teor. *f_* è un omomorfismo di gruppi.*

Dim. f_* ben definita perché $\simeq_{\{0,1\}}$ compositiva.
Scrivendo esplicitamente la definizione si verifica subito l'identità

$$f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta).$$

$$\begin{aligned} f_*([\alpha][\beta]) &= f_*([\alpha * \beta]) \\ &= [f \circ (\alpha * \beta)] = [(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)] \\ &= [(f \circ \alpha)][(f \circ \beta)] = f_*([\alpha]) f_*([\beta]). \end{aligned}$$

□

Teor (di funtorialità)**.** *Valgono le proprietà seguenti:*

1) $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X, x_0)}$.

2) $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *e* $g : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ *continue* $\Rightarrow (g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Dim. 1) Immediata. Dimostriamo *2*).

$$\begin{aligned} (g \circ f)_*([\alpha]) &= [(g \circ f) \circ \alpha] = [g \circ (f \circ \alpha)] \\ &= g_*(f_*([\alpha])) = (g_* \circ f_*)([\alpha]). \end{aligned}$$

□

Oss. $f : (X, x_0) \xrightarrow{\cong} (Y, y_0)$ omeo $\Rightarrow f_* : \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(Y, y_0)$ isomorfismo con inversa $(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*$. Quindi π_1 è un *invariante topologico*.

Oss. $c : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ costante $\Rightarrow c_* = 1$ (omomorfismo banale).

Teor (Invarianza omotopica)**.** $f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *continue t.c.* $f \simeq_{x_0} g$ $\Rightarrow f_* = g_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$.

Dim. L'omotopia è compositiva. □

Oss. I e I^2 connessi per archi $\Rightarrow \Omega(X, x_0) = \Omega(\mathcal{P}_{x_0}(X), x_0) \Rightarrow$

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_1(\mathcal{P}_{x_0}(X), x_0)$$

Per studiare π_1 possiamo restringerci a spazi connessi per archi.