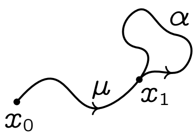
Dipendenza dal punto base

$\mu : I \to X$ continua con $\mu(0) = x_0$, $\mu(1) = x_1 \rightsquigarrow$

$$\mu_* : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$$
$$\mu_*([\alpha]) \overset{\text{def}}{=} [\mu * \alpha * \bar{\mu}]$$



Teor. *Valgono le proprietà seguenti:*
1) μ_* *ben definita.*

2) $\forall\, \mu_0 \simeq_{\{0,1\}} \mu_1 \Rightarrow \mu_{0*} = \mu_{1*}$.

3) $\gamma_{x_0 *} = \mathrm{id}_{\pi_1(X, x_0)}$.

4) $(\mu * \nu)_* = \mu_* \circ \nu_*$ *(se la concatenazione è definita).*

5) $(\mu_*)^{-1} = \bar{\mu}_*$.

6) μ_* *isomorfismo di gruppi.*

Dim. (*1*)$-$(*3*) immediate. (*4*) $\overline{\mu * \nu} = \bar{\nu} * \bar{\mu}$. (*5*) $\mu * \bar{\mu} \sim \gamma_{x_0}$ e (*2*)$-$(*4*).
(*6*) $\mu_*([\alpha][\beta]) = [\mu * \alpha * \beta * \bar{\mu}] = [\mu * \alpha * \bar{\mu} * \mu * \beta * \bar{\mu}] = \mu_*([\alpha])\, \mu_*([\beta])$. □

Cor. X *connesso per archi,* $\forall\, x_0, x_1 \in X \Rightarrow \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$.
$\pi_1(X) := \pi_1(X, x_0)$ *ben definito a meno di isomorfismi.*

N.B. In generale l'isomorfismo $\mu_* : \pi_1(X, x_1) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, x_0)$ dipende da μ.
$\pi_1(X)$ abeliano $\Rightarrow \mu_*$ indipendente da μ (isomorfismo canonico).

Prop. $X \searrow A$, $a \in A \Rightarrow i_* : \pi_1(A, a) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, a)$, *con* $i : A \hookrightarrow X$ *inclusione.*

Dim. $H : X \times I \to X$ deformazione $X \searrow A \rightsquigarrow r := h_1| : X \to A$ retrazione
$\Rightarrow i \circ r = h_1 \simeq_A \mathrm{id}_X$ e $r \circ i = \mathrm{id}_A \Rightarrow i_* \circ r_* = (i \circ r)_* = (\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,a)}$
e $r_* \circ i_* = (r \circ i)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(A,a)} \Rightarrow i_*$ isomorfismo e $i_*^{-1} = r_*$. □

Cor. $U \subset \mathbb{R}^n$ *convesso,* $x_0 \in U \Rightarrow \pi_1(U, x_0) = 0$.

Dim. $U \searrow \{x_0\}$. □

Oss. $\pi_1(B^n) = \pi_1(\mathbb{R}^n) = 0$, $\forall\, n \geqslant 0$.

Enunciamo il seguente teorema senza dimostrarlo.

Teor. $f : (X, x_0) \xrightarrow{\simeq} (Y, y_0)$ *equivalenza omotopica* $\Rightarrow$
$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ *isomorfismo.*

Cor. X *contraibile* $\Rightarrow \pi_1(X) = 0$.

Def. X è *semplicemente connesso* se $\forall\, x_0, x_1 \in X$, $\exists\, \alpha : I \to X$ continua t.c. $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = x_1$ e α unica a meno di $\simeq_{\{0,1\}}$.

Oss. X semplicemente connesso $\Leftrightarrow X$ cpa e $\forall\, \alpha_0, \alpha_1 : I \to X$ continue t.c. $\alpha_0(0) = \alpha_1(0) = x_0$ e $\alpha_0(1) = \alpha_1(1) = x_1 \Rightarrow \alpha_0 \simeq_{\{0,1\}} \alpha_1$.

Teor. X *semplicemente connesso* $\Leftrightarrow X$ *connesso per archi e* $\pi_1(X) = 0$.

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ $\forall\, [\alpha] \in \pi_1(X, x_0) \Rightarrow \alpha \sim \gamma_{x_0} \Rightarrow [\alpha] = 1$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\alpha_0 * \bar{\alpha}_1 \in \Omega(X, x_0) \Rightarrow [\alpha_0 * \bar{\alpha}_1] = [\gamma_{x_0}] \Rightarrow \alpha_0 * \bar{\alpha}_1 * \alpha_1 \simeq_{\{0,1\}} \gamma_{x_0} * \alpha_1$
$\Rightarrow \alpha_0 \simeq_{\{0,1\}} \alpha_1$. □

Cor. *$U \subset \mathbb{R}^n$ convesso $\Rightarrow$ U semplicemente connesso.*

Oss. B^n e $\mathbb{R}^n$ semplicemente connessi, $\forall\, n \geqslant 0$.

Cor. *X contraibile $\Rightarrow$ X semplicemente connesso.*

Def. Un rivestimento $p\colon X \to Y$ è detto *rivestimento universale di Y* se X è semplicemente connesso.

Funzione di sollevamento. $p\colon X \to Y$ rivestimento
$x_0 \in X$, $y_0 = p(x_0)$, $J = p^{-1}(y_0)$

$$\Phi_p : \pi_1(Y, y_0) \to J$$
$$\Phi_p([\alpha]) \overset{\text{def}}{=} \tilde{\alpha}_{x_0}(1)$$

con $\tilde{\alpha}_{x_0} : I \to X$ sollevamento di α t.c. $\tilde{\alpha}_{x_0}(0) = x_0$

Teor. *$p\colon X \to Y$ rivestimento universale $\Rightarrow$ Φ_p biiettiva.*

Def. Φ_p è detta *funzione di sollevamento*.

Dim. $\boxed{\textit{Ben definita}}$ $\alpha \sim \beta \Rightarrow \tilde{\alpha}_{x_0} \sim \tilde{\beta}_{x_0}$ (sollevamento dell'omotopia).

$\boxed{\textit{Suriettiva}}$ $\forall\, x_1 \in J \rightsquigarrow \gamma : I \to X$ t.c. $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1 \rightsquigarrow$ $\alpha := p \circ \gamma \in \Omega(Y, y_0)$ e $\tilde{\alpha}_{x_0} = \gamma \Rightarrow \Phi_p([\alpha]) = x_1$.

$\boxed{\textit{Iniettiva}}$ $\forall\, [\alpha], [\beta] \in \pi_1(Y, y_0)$, $\Phi([\alpha]) = \Phi([\beta]) \Rightarrow \tilde{\alpha}_{x_0}(1) = \tilde{\beta}_{x_0}(1) \Rightarrow$ $\tilde{\alpha}_{x_0} \simeq_{\{0,1\}} \tilde{\beta}_{x_0} \Rightarrow \alpha = p \circ \tilde{\alpha}_{x_0} \simeq_{\{0,1\}} p \circ \tilde{\beta}_{x_0} = \beta \Rightarrow [\alpha] = [\beta]$. $\square$

Oss. $p\colon X \to Y$ rivestimento univers. $[\alpha] = 1 \Leftrightarrow \Phi_p([\alpha]) = \Phi_p(1) = x_0$.

Calcolo di $\pi_1(S^1)$

Teor. *$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.*

Dim. $p\colon \mathbb{R} \to S^1$, $p(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$ rivestimento universale $y_0 = (1, 0) \in S^1$. $[\omega] \in \pi_1(S^1, y_0) \rightsquigarrow \tilde{\omega}_n : I \to \mathbb{R}$ unico sollevamento t.c. $\tilde{\omega}_n(0) = n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \tilde{\omega}_n = \tilde{\omega}_0 + n$ perché p ha periodo 1.

$\Phi_p : \pi_1(S^1, y_0) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$, $\Phi_p([\omega]) = \tilde{\omega}_0(1)$ biiettiva.

$$\begin{aligned}\Phi_p([\gamma][\omega]) &= (\widetilde{\gamma * \omega})_0(1) = (\tilde{\gamma}_0 * \tilde{\omega}_{\tilde{\gamma}_0(1)})(1) = \tilde{\omega}_{\tilde{\gamma}_0(1)}(1) = \tilde{\gamma}_0(1) + \tilde{\omega}_0(1) = \\ &= \Phi_p([\gamma]) + \Phi_p([\omega]) \Rightarrow \Phi_p \text{ omomorfismo.}\end{aligned}$$ $\square$

Cor. *S^1 non è semplicemente connesso, in particolare non è contraibile.*