Teoremi di non retrazione e di Brouwer

Teorema di non retrazione. *$\nexists$ retrazione continua $r\colon B^2 \to S^1$.*

Dim. Per assurdo, $r\colon B^2 \to S^1$ retrazione $\Rightarrow \mathrm{id}_{\pi_1(S^1)} = 0$. $\square$

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, hook, "i"] \arrow[rr, bend right, "r\circ i = \mathrm{id}_{S^1}"'] & B^2 \arrow[r, "r"] & S^1 \end{tikzcd} \rightsquigarrow \begin{tikzcd} \overset{\mathbb{Z}}{\pi_1(S^1)} \arrow[r, "i_*"] \arrow[rr, bend right, "r_*\circ i_* = \mathrm{id}_{\pi_1(S^1)}"'] & \overset{0}{\pi_1(B^2)} \arrow[r, "r_*"] & \overset{\mathbb{Z}}{\pi_1(S^1)} \end{tikzcd}$$

N.B. Più in generale, $\nexists$ retrazione continua $r\colon B^n \to S^{n-1}$.
Esercizio per $n = 1$.

Teorema del punto fisso di Brouwer. *$\forall\, f\colon B^2 \to B^2$ continua $\Rightarrow$ $\exists\, a \in B^2$ t.c. $f(a) = a$ (punto fisso).*

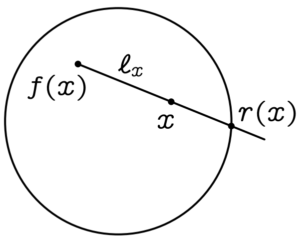
Dim. Per assurdo, $f(x) \neq x$, $\forall\, x \in B^2 \rightsquigarrow$

$$\ell_x := \{t(x - f(x)) + f(x) \mid t > 0\}$$

semiretta aperta con origine in $f(x)$ passante per $x \rightsquigarrow$

$$r\colon B^2 \to S^1$$
$$r(x) = \ell_x \cap S^1$$

retrazione continua, contraddizione. $\square$



N.B. Più in generale, $\forall\, f\colon B^n \to B^n$ continua $\Rightarrow \exists\, a \in B^n$ t.c. $f(a) = a$.
Esercizio per $n = 1$.

Applicazione. $f \in \mathbb{C}[x]$, $\deg f \geqslant 1$, sotto certe condizioni sui coefficienti $\exists\, a \in \mathbb{C}$ t.c. $|a| \leqslant 1$ e $f(a) = 0$.

Esempio. $f = x^7 - x^4 - 5x + 3i \in \mathbb{C}[x]$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x$ con

$$g(x) = \frac{1}{5}x^7 - \frac{1}{5}x^4 + \frac{3i}{5}.$$

$|x| \leqslant 1 \Rightarrow |g(x)| \leqslant 1 \Rightarrow g\colon B^2 \to B^2$ continua $\Rightarrow \exists\, a \in B^2$ t.c. $g(a) = a$.

Gruppi fondamentali delle sfere

Prop. $(\mathbb{R}^n - \{0\}) \overset{\sim}{\searrow} S^{n-1}$, $\forall\, n \geqslant 1$.

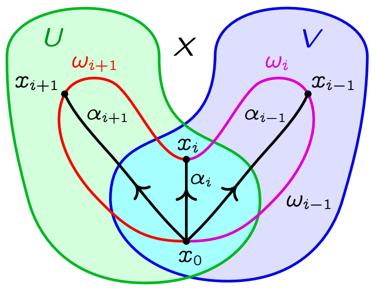
Dim.
$$H\colon (\mathbb{R}^n - \{0\}) \times I \to \mathbb{R}^n - \{0\}$$
$$H(x,t) = (1-t)x + \frac{tx}{\|x\|}.$$
$\square$

Prop. *Supponiamo $X = U \cup V$ con U, V e $U \cap V$ aperti non vuoti connessi per archi t.c. $\pi_1(U) = 0$ e $\pi_1(V) = 0 \Rightarrow \pi_1(X) = 0$.*

Dim. X connesso per archi, $x_0 \in U \cap V$ punto base. $\forall\,[\omega] \in \pi_1(X) \rightsquigarrow$ $\delta > 0$ numero di Lebesgue per $\{\omega^{-1}(U), \omega^{-1}(V)\}$ (ricopr. aperto di I) $\rightsquigarrow$ $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ t.c. $t_i - t_{i-1} < \delta \rightsquigarrow x_i := \omega(t_i)$

$$\omega([t_{i-1}, t_i]) \subset \begin{cases} U \\ V \end{cases}$$

$$\omega_i := \omega|_{[t_{i-1},t_i]} : [t_{i-1}, t_i] \to X$$



Definiamo $\alpha_i : I \to X$ t.c.
$\alpha_0 = \alpha_n = \gamma_{x_0}$, $\alpha_i(0) = x_0$, $\alpha_i(1) = x_i$

$$\alpha_i(I) \subset \begin{cases} U \cap V, & \text{se } x_i \in U \cap V \\ U, & \text{se } x_i \in U - V \\ V, & \text{se } x_i \in V - U \end{cases}$$

$$\gamma_i := \alpha_{i-1} * \omega_i * \bar{\alpha}_i \ \text{ cappio in } U \text{ o } V \ \Rightarrow\ [\gamma_i] = 1$$

$$[\omega] = \left[\prod_{i=1}^{n} \omega_i\right] = \left[\prod_{i=1}^{n} \gamma_i\right] = \prod_{i=1}^{n} [\gamma_i] = 1$$ □

Cor. $\pi_1(S^n) = 0$, $\forall\, n \geqslant 2$.

Dim. $a_\pm = (0, \ldots, 0, \pm 1) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $U_\pm = S^n - \{a_\pm\} \cong \mathbb{R}^n$
$U_+ \cap U_- \cong (\mathbb{R}^n - \{0\}) \simeq S^{n-1}$ connesso per archi per $n \geqslant 2$
$U_+ \cup U_- = S^n \Rightarrow \pi_1(S^n) = 0$. □

Oss. S^n semplicemente connesso $\Leftrightarrow n \geqslant 2$.

Cor. $\forall\, n \geqslant 2$, $\forall\, a \in \mathbb{R}^n$ *si ha*

$$\pi_1(\mathbb{R}^n - \{a\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 2 \\ 0, & n \geqslant 3. \end{cases}$$

Invarianza topologica della dimensione. $\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^n \Rightarrow m = n$.

Dim. Per $m = 2$ (ma vale in generale).
$f : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$ omeo $\Rightarrow f| : \mathbb{R}^2 - \{0\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n - \{f(0)\}$ omeo $\Rightarrow n \geqslant 2$
$\mathbb{Z} \cong \pi_1(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \cong \pi_1(\mathbb{R}^n - \{f(0)\}) \Rightarrow n = 2$. □

Gruppo fondamentale di uno spazio prodotto

Teor. $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ *isomorfismo canonico.*

Dim. $p_1 : X \times Y \to X$, $p_2 : X \times Y \to Y$ proiezioni canoniche $\rightsquigarrow$
$p := (p_{1*}, p_{2*}) : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ iso
$p([\omega]) = ([p_1 \circ \omega], [p_2 \circ \omega])$. □

Cor. $\pi_1(T^n) \cong \mathbb{Z}^n$.

Gruppi fondamentali degli spazi proiettivi

Caso reale.

$$\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \cong \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \mathbb{Z}, & n = 1 \\ \mathbb{Z}_2, & n \geqslant 2 \end{cases}$$

$\boxed{n = 1}$ $\mathbb{R}\mathrm{P}^1 \cong S^1 \Rightarrow \pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^1) \cong \mathbb{Z}$.
$\boxed{n \geqslant 2}$ $p\colon S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$, $p(x) = [x]$ rivestimento universale $\Rightarrow$
$\#(\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)) = d(p) = 2 \Rightarrow \pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \cong \mathbb{Z}_2$.

Oss. $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)$ generato da $[\omega]$ con

$$\begin{tikzcd} & S^n \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[ur, "\tilde{\omega}"] \arrow[r, "\omega"'] & \mathbb{R}\mathrm{P}^n \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{l} \tilde{\omega}(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t), 0 \ldots, 0) \\ \\ \omega(t) = [\cos(\pi t), \sin(\pi t), 0 \ldots, 0] \end{array}$$

infatti $\Phi_p([\omega]) = -a$, funzione di sollevamento da $a = (1, 0, \ldots, 0) \in S^n$.
ω parametrizza $\mathbb{R}\mathrm{P}^1 \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^n \Rightarrow i_*\colon \pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^1) \to \pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)$ suriettiva.
In altre parole $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)$ è "generato" da $\mathbb{R}\mathrm{P}^1 \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^n$.

Caso complesso.

$$\pi_1(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) = 0, \ \forall\, n \geqslant 0.$$

Induzione su n. $n = 0$ banale. Supponiamo $\pi_1(\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}) = 0$ per $n - 1 \geqslant 0$.
$H\colon x_0 = 0 \Rightarrow H \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1} \rightsquigarrow U = \mathbb{C}\mathrm{P}^n - H \cong \mathbb{C}^n \Rightarrow \pi_1(U) = 0$
$a = [1, 0, \ldots, 0] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n \rightsquigarrow V = \mathbb{C}\mathrm{P}^n - \{a\} \supset H$

$$K\colon V \times I \to V$$
$$K([x_0, x_1, \ldots, x_n], t) = [(1 - t)x_0, x_1 \ldots, x_n]$$

retrazione per deformazione $V \searrow H \Rightarrow \pi_1(V) \cong \pi_1(H) \cong \pi_1(\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}) = 0$
$U \cap V \cong \mathbb{C}^n - \{0\} \cong \mathbb{R}^{2n} - \{0\} \searrow S^{2n-1}$ connesso per archi.

Oss.
$\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ non semplicemente connesso $\forall\, n \geqslant 1$
$\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ semplicemente connesso $\forall\, n \geqslant 0$.