Teorema di Borsuk-Ulam

Lem. *H gruppo finito e $\varphi\colon H \to \mathbb{Z}$ omomorfismo $\Rightarrow \varphi = 0$.*

Dim. $\varphi(H)$ sottogruppo finito di $\mathbb{Z} \Rightarrow \varphi(H) = 0 \Rightarrow \varphi = 0$. $\square$

Teorema di Borsuk-Ulam. *$\forall\, f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ continua $\Rightarrow \exists\, a \in S^2$ t.c.*

$$f(a) = f(-a).$$

Dim. Per assurdo, $f(x) \neq f(-x)$, $\forall\, x \in S^2 \rightsquigarrow$

$$g : S^2 \to S^1$$

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}$$

$g(-x) = -g(x) \rightsquigarrow G : \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^1$, $G([x]) = [g(x)]$ continua $\Rightarrow G_* = 0$

$$\begin{tikzcd} \pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) \arrow[r, "G_*=0"] \arrow[d, phantom, "\wr\|"] & \pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^1) \arrow[d, phantom, "\wr\|"] \\ \mathbb{Z}_2 \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & S^2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p_2"] & S^1 \arrow[d, "p_1"] \\ I \arrow[ur, "\tilde{\omega}"] \arrow[r, "\omega"'] & \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \arrow[r, "G"'] & \mathbb{R}\mathrm{P}^1 \end{tikzcd}$$

$$\omega(t) = [\cos(\pi t), \sin(\pi t), 0]$$
$$\tilde{\omega}(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t), 0)$$

$g \circ \tilde{\omega}$ sollevamento di $G \circ \omega$ tramite $p_1 : S^1 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^1$. $\tilde{\omega}(1) = -\tilde{\omega}(0) \Rightarrow$ $(g \circ \tilde{\omega})(1) = -(g \circ \tilde{\omega})(0) \Rightarrow G_*([\omega]) = [G \circ \omega] \neq 0$, contraddizione. $\square$

Oss. In ogni istante ci sono due punti antipodali della superficie terrestre con stessa temperatura e pressione atmosferica.

Cor. *S^2 non si può immergere in $\mathbb{R}^2$.*

Oss. Non è possibile realizzare un planisfero continuo di tutta la Terra.