Geometria 3 – Topologia

Foglio di esercizi 2

Giustificare adeguatamente le risposte.

1) Supponiamo che $\mathcal{B}$ sia base per $(X, \mathcal{T})$. Per ogni $x \in X$ definiamo

$$\mathcal{B}_x := \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}.$$

Dimostrare che $\mathcal{B}_x$ è base di intorni di x in X.

2) Dati sottospazi $A \subset Y \subset X$ dimostrare che A è chiuso in $Y \Leftrightarrow \exists\, B \subset X$ chiuso in X t.c. $A = B \cap Y$.

3) Dati $Z \subset Y \subset X$ sottospazi topologici di X con Y aperto in X, dimostrare che Z aperto in $Y \Leftrightarrow Z$ aperto in X.

4) Dati $Z \subset Y \subset X$ sottospazi topologici di X con Y chiuso in X, dimostrare che Z chiuso in $Y \Leftrightarrow Z$ chiuso in X.

5) La famiglia degli intervalli chiusi e limitati di R è base per una topologia?

6) Sia X uno spazio topologico e $A \subset X$. Dimostrare che

   (a) $\mathrm{Cl}_X A = \mathrm{Int}_X A \cup \mathrm{Fr}_X A$.

   (b) $\mathrm{Cl}_X A = A \cup \mathrm{Fr}_X A$.

   (c) $\mathrm{Fr}_X A = \mathrm{Fr}_X(X - A)$.

   (d) $X = \mathrm{Fr}_X A \cup \mathrm{Int}_X A \cup \mathrm{Ext}_X A$, e che questi tre sottoinsiemi sono a due a due disgiunti.

7) Calcolare $\mathrm{Fr}_R[0,1]$ e $\mathrm{Fr}_{R_\ell}[0,1]$.

8) Sia $Q \subset R$ l'insieme dei numeri razionali. Calcolare interno, frontiera e chiusura di Q in R.

9) Dimostrare che ogni punto della retta di Sorgenfrey R_ℓ ammette una base di intorni numerabile.

10) Dimostrare che ogni spazio topologico metrizzabile finito è discreto.

11) X_{cof} è metrizzabile?