Geometria 3 – Topologia

Foglio di esercizi 3

Giustificare adeguatamente le risposte.

1) Dimostrare le seguenti.

   (a) $B^n \cong [-1,1]^n \subset R^n$.

   (b) $\mathrm{Int}_{R^n} B^n = \{x \in R^n \mid \|x\| < 1\}$.

   (c) $\mathrm{Int}_{R^n} B^n \cong R^n$.

   (d) $\mathrm{Fr}_{R^n} B^n = S^{n-1}$.

2) Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici. Un'applicazione $f: X \to Y$ è detta *Lipschitziana* se $\exists\, K \geq 0$ t.c. $d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq K d_X(x_1, x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in X$. Sia $f: X \to Y$ Lipschitziana. Dimostrare che f è continua.

3) Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici. Un'applicazione $f: X \to Y$ è *isometrica* se $d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in X$. f è un'*isometria* se è isometrica e suriettiva. Dimostrare che le isometrie sono omeomorfismi e concludere che le applicazioni isometriche sono immersioni.

4) Dimostrare che C^n e R^{2n} sono isometrici rispetto alla distanza Euclidea, quindi omeomorfi.

5) Sia V spazio vettoriale normato e $w \in V$. Definiamo la traslazione

$$t_w: V \to V, \quad t_w(v) = v + w.$$

   Dimostrare che t_w è isometria e dunque omeo.

6) Siano $X = X_1 \cup X_2$ e Y spazi topologici, con $X_1, X_2 \subset X$ chiusi, e siano $f_i: X_i \to Y$, $i = 1, 2$, continue t.c. $f_1(x) = f_2(x)$ $\forall\, x \in X_1 \cap X_2$. Definiamo $f: X \to Y$ ponendo

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x \in X_1 \\ f_2(x) & \text{se } x \in X_2. \end{cases}$$

   Dimostrare che f è ben definita e continua (si chiama *Lemma d'incollamento*). Cosa succede senza l'ipotesi X_1, X_2 chiusi? Se sono entrambi aperti?

7) Per ogni $m, n \in \mathbb{N}$ e per $K = R$ oppure C consideriamo lo spazio delle matrici $M_{m,n}(K)$ e poniamo $\|A\| := \big(\mathrm{tr}({}^t\bar{A}A)\big)^{\frac{1}{2}}$, dove $\mathrm{tr}(M)$ è la traccia di $M \in M_n(K)$ (somma delle entrate sulla diagonale principale). Mostrare che

   (a) $\|\cdot\|$ è una norma su $M_{m,n}(K)$;

   (b) $M_{m,n}(K)$ è isometrico, dunque omeomorfo, a K^{mn};

   (c) $\mathrm{GL}_n(K)$ è aperto in $M_n(K)$;

   (d) $\mathrm{SL}_n(K)$ è chiuso in $M_n(K)$;

   (e) $\mathrm{O}(n)$ e $\mathrm{SO}(n)$ sono chiusi in $M_n(R)$.

   (f) $\mathrm{U}(n)$ e $\mathrm{SU}(n)$ sono chiusi in $M_n(C)$.

8) Sia (Y, d) uno spazio metrico e X uno spazio topologico. Dimostrare che $f : X \to Y$ è continua sse $\forall x_0 \in X$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists U \subset X$ intorno di x_0 t.c.

$$x \in U \;\Rightarrow\; d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

9) Sia (X, d) uno spazio metrico e Y uno spazio topologico. Dimostrare che $f : X \to Y$ è continua sse $\forall x_0 \in X$, $\forall V \subset Y$ intorno aperto di $f(x_0)$, $\exists \delta > 0$ t.c.

$$d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; f(x) \in V.$$

10) Sia X uno spazio topologico e siano $f, g : X \to R$ continue. Dimostrare che le funzioni $f+g$, fg e $\frac{f}{g}$ (quest'ultima definita nell'aperto $U = \{x \in X \mid g(x) \neq 0\}$) sono continue.

11) Sia $f : X \to Y$ omeo e $A \subset X$. Dimostrare che $f|_A : A \to f(A)$ omeo.

12) Sia $\Gamma \subset R^2$ un'ellisse. Dimostrare che $\Gamma \cong S^1$.

13) Consideriamo lo spazio vettoriale delle successioni reali a supporto finito (aventi al più soltanto un numero finito di termini non nulli)

$$X = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset R \mid \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.c. } x_n = 0 \ \forall n > N\}.$$

Per ogni $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ poniamo

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\}, \qquad \|x\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|.$$

   (a) Mostrare che queste sono due norme su X. Indichiamo con $\mathcal{T}_\infty$ e $\mathcal{T}_1$ le rispettive topologie indotte su X.

   (b) Mostrare che $\|\cdot\|_\infty : X \to R$ è continua rispetto alla topologia $\mathcal{T}_1$.

   (c) Mostrare che $\|\cdot\|_1 : X \to R$ non è continua rispetto alla topologia $\mathcal{T}_\infty$.

   (d) Concludere che $\mathcal{T}_\infty \subsetneq \mathcal{T}_1$ e che quindi queste due norme non sono equivalenti.

   (e) Determinare una base di X e concludere che $\dim X = \infty$.