

# Geometria 3 – Topologia

## Foglio di esercizi 4

Giustificare adeguatamente le risposte.

- 1) Dimostrare che se  $f_1: X_1 \rightarrow Y_1$  e  $f_2: X_2 \rightarrow Y_2$  sono continue (risp. aperte), allora

$$\begin{aligned} f_1 \times f_2: X_1 \times X_2 &\rightarrow Y_1 \times Y_2 \\ (f_1 \times f_2)(x_1, x_2) &:= (f_1(x_1), f_2(x_2)) \end{aligned}$$

è continua (risp. aperta).

- 2) Dimostrare che se  $A \subset X$  e  $B \subset Y$  allora:

- (a)  $\text{Cl}(A \times B) = \text{Cl} A \times \text{Cl} B$ ;
- (b)  $\text{Int}(A \times B) = \text{Int} A \times \text{Int} B$ ;
- (c)  $\text{Fr}(A \times B) = (\text{Fr} A \times \text{Cl} B) \cup (\text{Cl} A \times \text{Fr} B)$ .

Dedurre quindi la “formula di Leibniz” per la frontiera: se  $A$  e  $B$  sono chiusi allora

$$\text{Fr}(A \times B) = (\text{Fr} A \times B) \cup (A \times \text{Fr} B).$$

Esaminare in un disegno il caso particolare del quadrato  $\text{Fr}_{\mathbb{R}^2}([0, 1] \times [0, 1])$ .

- 3) Siano  $A \subset X$  e  $B \subset Y$  due chiusi. Dimostrare che  $A \times B$  è chiuso in  $X \times Y$ .
- 4) Consideriamo una famiglia di spazi  $\{X_i\}_{i \in I}$  e sia  $A_i \subset X_i$  chiuso in  $X_i \forall i \in I$ . Dimostrare che  $\prod_{i \in I} A_i$  è chiuso in  $\prod_{i \in I} X_i$ .
- 5) Dimostrare che il gruppo quoziente  $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$  ha la topologia banale.
- 6) Dimostrare che la seguente funzione è ben definita e continua:

$$\psi: \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi([x_0, x_1, x_2]) = \frac{x_0 x_1}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2}.$$