Geometria 3 – Topologia

Foglio di esercizi 5

Giustificare adeguatamente le risposte.

1) Dimostrare che se X e Y sono T_1 allora $X \times Y$ è T_1.

2) Dimostrare che se X e Y sono T_2 allora $X \times Y$ è T_2.

3) Dimostrare che se X e Y sono T_3 allora $X \times Y$ è T_3.

4) Estendere i tre esercizi precedenti al caso di prodotti arbitrari.

5) Consideriamo il *piano di Sorgenfrey* $\mathbb{R}^2_\ell := \mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$ e sia $L \subset \mathbb{R}^2_\ell$ la retta di equazione $L\colon x + y = 0$. Dimostrare che L è chiuso in $\mathbb{R}^2_\ell$. Qual è la topologia indotta su L?

6) Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione tra spazi topologici con Y di Hausdorff. Dimostrare che se f è continua allora il grafico $\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$ è chiuso. Vale il viceversa?

7) Dimostrare che uno spazio quoziente $X/\!\sim$ è $T_1 \Leftrightarrow$ tutte le classi d'equivalenza sono chiuse in X (si dice che $\sim$ è una *relazione d'equivalenza chiusa*).

8) Dimostrare che se $X/\!\sim$ è T_2 allora il grafico $\Gamma_\sim := \{(x, y) \in X \times X \mid x \sim y\}$ è chiuso in $X \times X$.

9) Dimostrare che se $\sim$ è una relazione d'equivalenza su X con grafico chiuso e l'applicazione quoziente $\pi\colon X \to X/\!\sim$ è aperta allora $X/\!\sim$ è T_2.

10) Dimostrare che la retta con due origini $R_\div$ è T_1 ma non T_2.

11) Dimostrare che $\mathbb{R}_\ell$ è T_4 (spiegare perché $U \cap V = \varnothing$, vedi Lezione 9).

12) Dimostrare che uno spazio topologico X è $T_1 \Leftrightarrow$ ogni punto $x \in X$ è intersezione dei suoi intorni.