Geometria 3 – Topologia

Foglio di esercizi 6

Giustificare adeguatamente le risposte.

1) Supponiamo X spazio T_3 e $A \subset X$ chiuso. Dimostrare che A è intersezione di tutti gli aperti che lo contengono.

2) Dimostrare che I-numerabile e II-numerabile sono proprietà topologiche ereditarie.

3) Consideriamo l'inclusione canonica $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ (asse x). Dimostrare che $\mathbb{R}$ non ammette basi di intorni numerabili in $\mathbb{R}^2$.

4) Supponiamo $X = X_1 \cup \cdots \cup X_n$ con $X_1, \ldots, X_n$ sottospazi compatti e $n \geq 1$. Dimostrare che X è compatto.

5) Supponiamo X di Hausdorff e $\{Y_i\}_{i \in I}$ famiglia di sottospazi compatti di X, con I insieme qualsiasi. Dimostrare che $Y = \bigcap_{i \in I} Y_i$ è compatto.

6) Dimostrare che ogni spazio cofinito è compatto.

7) Sia X localmente compatto e $Y \subset X$ sottospazio compatto. Dimostrare che Y ha un intorno compatto in X.

8) Sia X localmente compatto di Hausdorff e $Y \subset X$ sottospazio compatto. Dimostrare che Y ha una base di intorni compatti in X.

9) Sia X di Hausdorff e $A, B \subset X$ compatti disgiunti. Dimostrare che $\exists\, U, V \subset X$ aperti t.c. $A \subset U$, $B \subset V$ e $U \cap V = \varnothing$.

10) Sia X compatto metrizzabile. Dimostrare che X è II-numerabile.

11) Dimostrare che la retta di Sorgenfrey $\mathbb{R}_\ell$ non è localmente compatta.