Geometria 3 – Topologia

Foglio di esercizi 7

Giustificare adeguatamente le risposte.

1) Consideriamo $A \subset X$, con X spazio topologico. Dimostrare che $\mathrm{Int}_X A = \varnothing$ se e solo se $X - A$ è denso in X.

2) Sia $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$. Supponiamo che esista un aperto non vuoto $U \subset \mathbb{R}^n$ t.c. f si annulli su U. Dimostrare che $f = 0$.

3) Consideriamo lo spazio delle matrici quadrate $M_n(\mathbb{R})$ con la topologia Euclidea. Dimostrare che:

   (a) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ è aperto denso in $M_n(\mathbb{R})$.

   (b) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ è chiuso non compatto in $M_n(\mathbb{R})$.

   (c) $\mathrm{O}(n)$ e $\mathrm{SO}(n)$ sono compatti.

4) Dimostrare che $\mathrm{SO}(2) \cong S^1$.

5) Dimostrare che $\mathrm{SO}(n)$ si immerge in $(S^{n-1})^{n-1}$.

6) Dimostrare che l'applicazione

$$f : B^n \to S^n, \quad f(x) = \begin{cases} (0, \dots, 0, 1) & \text{se } x = 0 \\ \left(\sin(\pi\|x\|)\dfrac{x}{\|x\|}, \cos(\pi\|x\|) \right) & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

   induce un omeomorfismo $B^n / S^{n-1} \cong S^n$.

7) Dimostrare che T^n si immerge in $\mathbb{R}^{n+1}$ (suggerimento: generalizzare la dimostrazione nel caso di T^2 della Lezione 14, e fare induzione su n).

8) Determinare un omeomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che manda l'asse x nel grafico del seno.

9) Dimostrare che l'applicazione $\varphi : \mathbb{RP}^n \to \mathbb{R}^{(n+1)^2}$ della Lezione 13 è iniettiva.

10) Sia (X, d) uno spazio metrico. Dimostrare che la distanza $d : X \times X \to \mathbb{R}$ è continua (suggerimento: usare la distanza del massimo nel prodotto). Concludere che se X è compatto allora esistono due punti $a, b \in X$ t.c. $d(a, b) = \mathrm{diam}\, X$.

11) Sia $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\} \subset \mathbb{R}^2$. Dimostrare che $H \cong \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$.