Geometria 3 – Topologia

Foglio di esercizi 9

Giustificare adeguatamente le risposte.

1) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ biiettiva e aperta. Dimostrare che f è un omeomorfismo.
2) Siano $U, V \subset \mathbb{R}$ con U aperto e sia $f : U \to V$ continua e biiettiva. Dimostrare che V è aperto e f è un omeomorfismo.
3) Siano $A, B \subset \mathbb{R}$ chiusi e $f : A \to B$ continua, biiettiva e monotona. Dimostrare che $\exists\, \tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ omeomorfismo che estende f.
4) Sia $A \subset R^n$ finito e $n \geq 2$. Dimostrare che $R^n - A$ è connesso per archi.
5) Dimostrare che $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ è totalmente sconnesso (le componenti connesse sono i punti).
6) Dimostrare che la retta con due origini è connessa per archi.
7) Dimostrare che X_{cof} connesso $\Leftrightarrow$ X_{cof} ha un punto oppure infiniti.
8) Dimostrare che X, Y connessi per archi $\Rightarrow$ $X \times Y$ connesso per archi.
9) Dimostrare che T^n è connesso per archi.
10) Dimostrare che $\mathrm{SO}(n)$ è connesso per archi per ogni $n \geq 1$.
11) Dimostrare che $\mathrm{O}(n)$ ha due componenti connesse per archi, di cui una è $\mathrm{SO}(n)$, e che queste sono tra loro omeomorfe.
12) Quali sono le componenti connesse per archi di $\mathbb{R}^n - S^{n-1}$? E quelle di $\mathbb{R}^n - B^n$?
13) Dimostrare che la composizione di due equivalenze omotopiche è un'equivalenza omotopica.
14) Dimostrare che uno spazio X è contraibile se e solo se ogni applicazione continua $f : X \to Y$ verso uno spazio arbitrario Y è omotopa a costante.
15) Dimostrare che uno spazio X è contraibile se e solo se ogni applicazione continua $f : Y \to X$ da uno spazio arbitrario Y è omotopa a costante.