Geometria 3 – Topologia

Foglio di esercizi 10

Giustificare adeguatamente le risposte.

1) Sia $r : X \to A$ una retrazione continua e X di Hausdorff. Dimostrare che A è chiuso in X.

2) Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ convesso, $x_0, x_1 \in X$ e $\alpha, \beta : I \to X$ due cammini t.c. $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$ e $\alpha(1) = \beta(1) = x_1$. Dimostrare che $\alpha \simeq_{\{0,1\}} \beta$ in X.

3) Sia $U \subset R^n$ un aperto non vuoto. Dimostrare che ogni cammino continuo in U è omotopo rel $\{0,1\}$ ad un cammino poligonale (cioè un cammino che è unione finita di segmenti consecutivi). Concludere che U connesso $\Leftrightarrow$ due punti qualsiasi di U possono essere congiunti con una poligonale.

4) Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ compatto non vuoto. Dimostrare che $R^n - K$ ammette una retrazione su una ipersfera $S^{n-1}(a, r)$ di centro a e raggio r opportuni.

5) Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ compatto non vuoto, con $n \geq 2$. Dimostrare che $\mathbb{R}^n - K$ ammette un'unica componente connessa illimitata.

6) Dimostrare che la composizione di due rivestimenti finiti è un rivestimento. Qual è il grado?

7) Dimostrar che $(S^n \times I)/(S^n \times \{0\}) \cong B^{n+1}$.

8) Sia $f : S^n \to X$ continua. Dimostrare che $f \simeq$ costante se e solo se f si puo estendere ad un'applicazione continua $\tilde{f} : B^{n+1} \to X$.

9) Dimostrare che l'inclusione $i : S^1 \hookrightarrow S^2$ è omotopa a costante.

10) Dimostrare che $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n \Rightarrow n = 1$.