

# Geometria 3 – Topologia

## V appello d'esame

Anno accademico 2022-2023

25/7/2023

Giustificare adeguatamente le risposte.

Il punteggio minimo per l'ammissione all'orale è 16.

1) (8 punti). Sia  $L \subset \mathbb{R}^3$  una retta affine.

(a) (4 punti). Dimostrare che  $\mathbb{R}^3 - L$  è omotopicamente equivalente a  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ .

(b) (4 punti). Calcolare  $\pi_1(\mathbb{R}^3 - L)$ .

2) (8 punti). Sia  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ .

(a) (4 punti). Dimostrare che  $X$  ammette una retrazione per deformazione forte su  $\{(0, 0)\}$ .

(b) (4 punti). Dimostrare che  $X$  non è omeomorfo a  $\mathbb{R}$ .

3) (7 punti). Per ogni  $a \in \mathbb{C}$  consideriamo il polinomio complesso

$$f_a(x) = x^{13} - (1 + i)x^9 + 5ix^5 + x^4 + ax + 3.$$

Dimostrare che se  $|a| \geq 10 + \sqrt{2}$  allora  $f_a$  ammette almeno una radice complessa di modulo  $\leq 1$ .

4) (7 punti). Sia  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua e biiettiva. Dimostrare che  $h$  è un omeomorfismo.