

1 RISCHI E ASSICURAZIONE

Ermanno Pitacco

Matematica attuariale delle assicurazioni vita

- 1.1 Introduzione
- 1.2 “Rischio”: definizioni
- 1.3 Gestione dei rischi
- 1.4 Quantificazione dei rischi e dei relativi impatti: alcuni modelli
- 1.5 Misure di rischio
- 1.6 Trasferimento dei rischi
- 1.7 Prodotti assicurativi

1.1 INTRODUZIONE

Obiettivi di RISCHI ED ASSICURAZIONE:

- presentare il concetto di *rischio* individuale; in particolare:
 - ▷ rischio *puro* e rischio *speculativo*
 - ▷ aspetti quantitativi delle conseguenze finanziarie (negative) di alcuni eventi che possono riguardare una persona, una famiglia, un'impresa, ecc
- presentare idee di base riguardanti:
 - ▷ il trasferimento di rischi individuali a un *pool di rischi*
 - ▷ caratteristiche di un pool, in relazione alle caratteristiche dei rischi individuali

- introdurre il ruolo di un assicuratore che
 - ▷ accetta rischi individuali
 - ▷ costruisce un pool
 - ▷ sopporta il rischio di perdite causate da
 - un numero inatteso di eventi nel pool
 - un ammontare totale inatteso delle conseguenze finanziarie di tali eventi

1.2 “RISCHIO”: DEFINIZIONI

ALCUNE IDEE PRELIMINARI

Varie definizioni proposte per il termine “rischio”

- nel linguaggio comune (spesso usato con significato “negativo”)
- nel più specifico linguaggio economico-aziendale
- nel linguaggio assicurativo in particolare

Definizione molto generale in termini matematici:

rischio è una *variabile aleatoria* (v.a.) X , la cui determinazione (o *realizzazione*) effettiva non è nota

- ▷ specificare un *insieme di realizzazioni possibili*
- ▷ assegnare una *distribuzione di probabilità* su tale insieme

Esempi

- X = punti sulla faccia di un dado;
 - ▷ possibili determinazioni $1, 2, \dots, 6$
 - ▷ distribuzione di probabilità uniforme (ragionevole ipotesi di simmetria)
- X rappresenta, in termini monetari, il danno conseguente un incendio in un edificio industriale
 - ▷ insieme delle determinazioni possibili del rischio X : intervallo $[0, x_{\max}]$
 - $X = 0$ assenza di danno
 - $X = x_{\max}$ perdita totale dell'edificio, il cui valore è x_{\max}
 - ▷ distribuzione di probabilità basata su esperienze statistiche e (eventualmente) espressa da modello parametrico

Osservazione

X denota il danno “diretto”, al quale vanno sommati i danni “indiretti” dovuti a interruzione (totale o parziale) del processo produttivo

“Rischio”: definizioni (cont.)

- X rappresenta il risultato economico annuale di un'impresa, alla fine di un dato anno (futuro)
 - ▷ insieme delle determinazioni possibili del rischio X : intervallo $[x', x'']$, con valori stimati
 - massima perdita possibile x' ($x' < 0$)
 - massimo profitto possibile x'' ($x'' > 0$)
 - segno di X :
 - $X < 0 \Leftrightarrow$ perdita
 - $X = 0 \Leftrightarrow$ pareggio
 - $X > 0 \Leftrightarrow$ utile
 - ▷ distribuzione di probabilità basata su esperienze statistiche e (eventualmente) espressa da modello parametrico

ESPOSIZIONE AL RISCHIO: ALCUNI CASI

Consideriamo un insieme di esempi (“casi”), nell’ambito della finanza e dell’assicurazione

In questa sezione:

- ▷ descrizione di vari tipi di rischio
- ▷ in particolare, *cause* di rischio (scenario finanziario, aspetti demografici, verificarsi di “sinistri”, ecc.)

Nelle sezioni seguenti:

- ▷ *quantificazione* in termini probabilistici dei rischi e del relativo impatto su risultati significativi (utili, flussi di cassa, ecc.)
- ▷ possibile *trasferimento* dell’impatto (finanziario) di rischi, in particolare tramite *assicurazione*

OPERAZIONI FINANZIARIE CON RISULTATI ALEATORI

Insieme di operazioni: A, B, \dots (per esempio: acquisto di zero-coupon bonds, investimento in azioni, ecc.)

Ciascuna operazione comporta un *risultato* aleatorio in un dato istante

X_A, X_B, \dots : risultati prodotti dalle varie operazioni; per esempio, l'operazione A produce il risultato X_A , le cui determinazioni possibili sono $x_{A,1}, x_{A,2}, \dots$

La determinazione effettiva di ciascun risultato dipende da quale *stato del mondo* si verifica, in un dato insieme di stati mutuamente escludentisi

Ciascuno stato riassume aspetti dello scenario economico-finanziario che possono influire sui risultati delle operazioni (tassi di rendimento sui mercati finanziari, tassi di cambio delle valute, ecc.), e quindi è un *evento composto*; $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots$ denotano i possibili eventi

“Rischio”: definizioni (*cont.*)

| | \mathcal{E}_1 | \mathcal{E}_2 | ... |
|-------|-----------------|-----------------|-----|
| X_A | $x_{A,1}$ | $x_{A,2}$ | ... |
| X_B | $x_{B,1}$ | $x_{B,2}$ | ... |
| X_C | $x_{C,1}$ | $x_{C,2}$ | ... |
| ... | ... | ... | ... |

Un insieme di operazioni finanziarie con risultati aleatori

Caso 1a - Zero-coupon bonds

Si consideri uno zero-coupon bond, il cui payoff a scadenza (es. un anno) dipende dallo stato del mondo in quell'istante, cioè un *risky bond*

All'acquisto del bond, lo stato del mondo a scadenza non è noto, dunque aleatorio. Per semplicità, due determinazioni (eventi) possibili: $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$

Siano 50 e 150 i corrispondenti payoff del bond

In particolare, si supponga che

- 50 implichi una perdita in relazione all'importo investito nell'acquisto del bond
- 150 implichi un utile

Sia X_A il payoff aleatorio a scadenza

Un altro zero-coupon bond produce a scadenza un payoff, $X_B = 100$, indipendente dallo stato del mondo: un *risk-free bond*

“Rischio”: definizioni (cont.)

| | \mathcal{E}_1 | \mathcal{E}_2 |
|-------|-----------------|-----------------|
| X_A | 50 | 150 |
| X_B | 100 | 100 |

Payoff di due zero-coupon bonds

Osservazione 1

Bond con payoff X_B “risk-free”: il rischio è considerato trascurabile, nel senso che siamo (quasi) certi che il payoff sarà 100, qualunque sia lo scenario \Rightarrow *counterparty risk* trascurato nel modello

Ogni *modello* deve fornire una rappresentazione semplificata (ma non distorta) della *realtà*

Osservazione 2

All models are wrong,
but some are useful

George E. P. Box (1978)

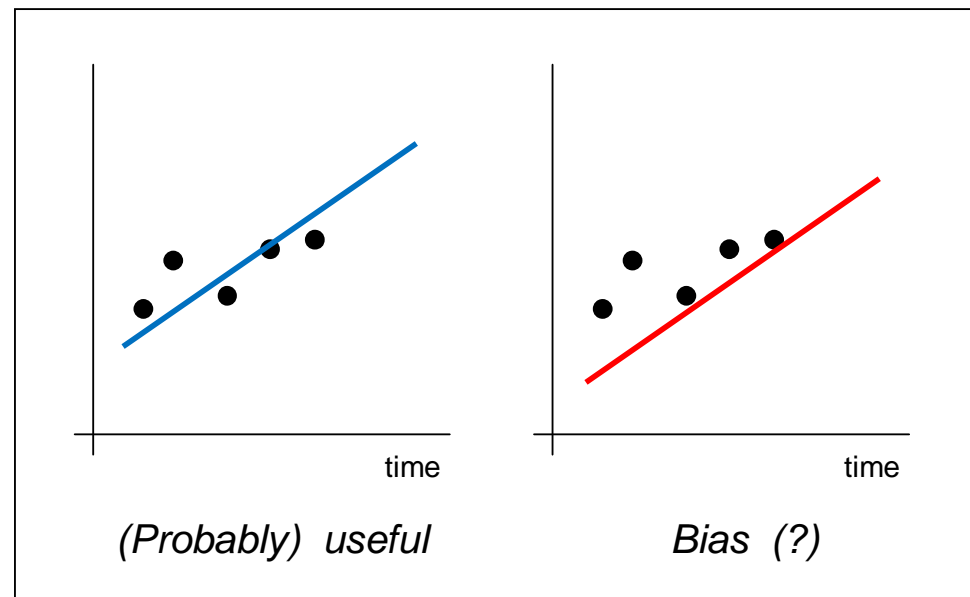
The practical question is
how wrong do they have to be
to not be useful

George E. P. Box (1987)



Osservazione 3

Problema di perequazione ed estrapolazione: modello lineare



Caso 1b - Rendimenti aleatori

La Tab. rappresenta i possibili rendimenti (per 100 unità monetarie investite) prodotti da quattro investimenti

Per ogni investimento, ciascuna determinazione dipende dallo stato del mondo

| | \mathcal{E}_1 | \mathcal{E}_2 | \mathcal{E}_3 |
|-------|-----------------|-----------------|-----------------|
| X_1 | 5.0 | 6.0 | 7.0 |
| X_2 | 0.0 | 6.0 | 12.0 |
| X_3 | 5.2 | 6.1 | 6.1 |
| X_4 | 5.0 | 6.0 | 6.5 |

Investimenti con rendimenti aleatori

Osservazione

Nei Casi 1a e 1b, la presenza di rischio può comportare utile o perdita
⇒ *rischi speculativi*

UN RISCHIO ELEMENTARE (ASSICURABILE)

Il più semplice esempio di situazione in cui la presenza di rischio può causare solo perdita

Questo caso sarà richiamato nel seguito, come punto di partenza per presentare procedure di quantificazione degli effetti di un rischio, costruzione di “pool” di rischi, ecc

Osservazione

Se la presenza di rischio può causare solo perdite ⇒ *rischi puri*

Caso 2 - Possibile perdita di importo fisso

Un “agente” (persona, impresa, ecc) può subire una perdita monetaria o danno x (impatto) a causa di un evento, o “sinistro”, \mathcal{E} che può verificarsi entro un dato periodo

Se il sinistro si verifica, l'importo della perdita è certo

Per esempio: perdita totale di un carico durante trasporto aereo; valore del carico = x ; non si considera la possibilità di danno parziale

Formalmente, la possibile perdita è rappresentata dalla v.a. X :

$$X = \begin{cases} x & \text{se } \mathcal{E} \\ 0 & \text{se } \bar{\mathcal{E}} \end{cases}$$

Altre applicazioni del modello:

- ▷ importo x quantifica le conseguenze finanziarie del decesso (ad es. entro un anno) di una persona che mantiene la famiglia
- ▷ importo x , come sopra nel caso di invalidità permanente

Osservazione

L'*indicatore* di \mathcal{E} è la variabile aleatoria definita come segue:

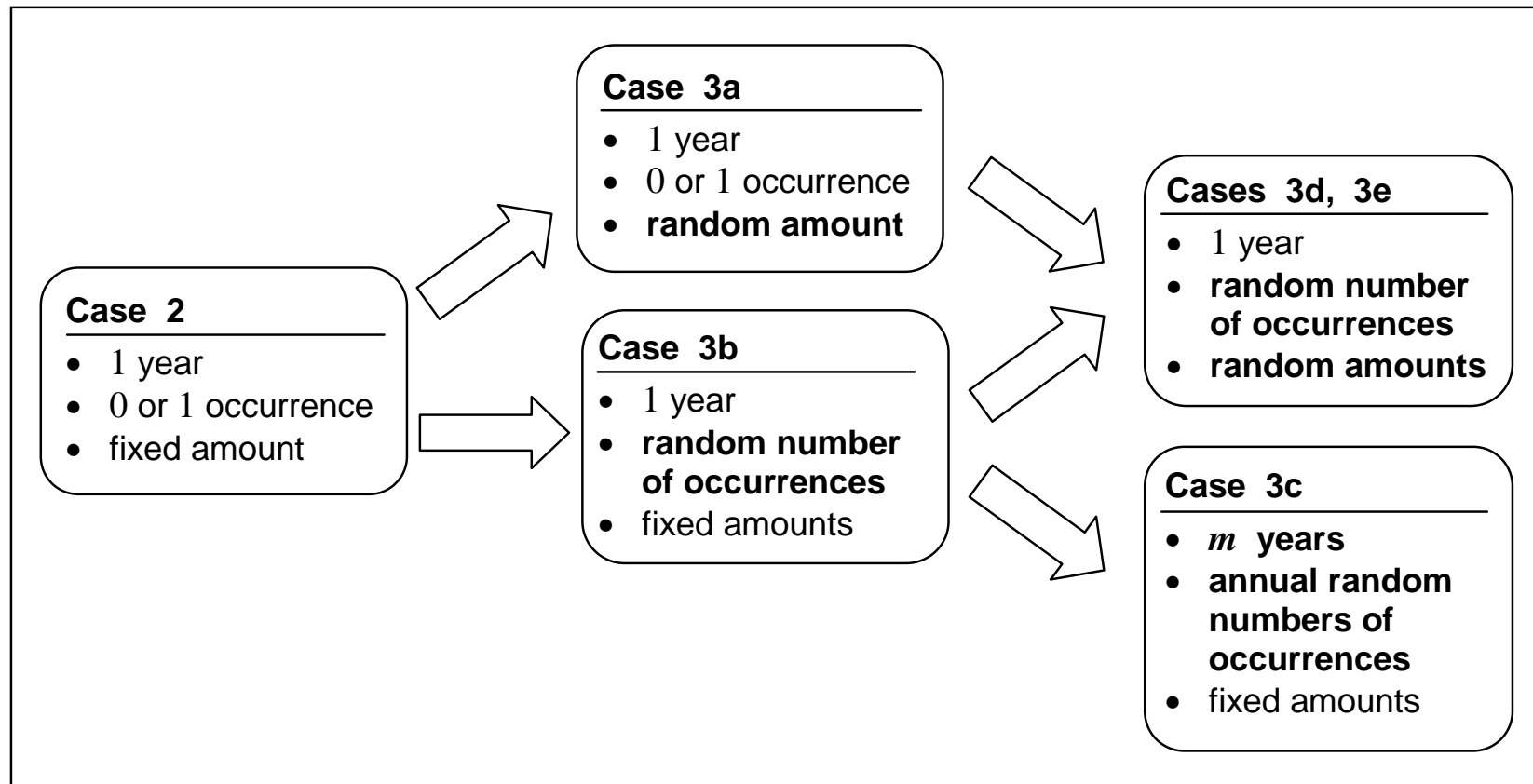
$$|\mathcal{E}| = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathcal{E} \\ 0 & \text{se } \bar{\mathcal{E}} \end{cases}$$

Quindi:

$$X = x |\mathcal{E}|$$

NUMERI ALEATORI ED IMPORTI ALEATORI

Varie interessanti generalizzazioni del modello relativo al Caso 2



Dal rischio elementare a situazioni più generali

Caso 3a - Danno / perdita di un carico

Si consideri la possibilità di danno parziale durante il trasporto

Ammontare di danno: variabile aleatoria (v.a.) X

Possibili determinazioni: scelta tra

- impostazione “discreta”

$$X : 0, x_1, \dots, x_{\max}$$

- impostazione “continua”

$$0 \leq X \leq x_{\max}$$

Massimo importo x_{\max} dato dal valore del carico

Per riassumere il danno aleatorio: alcuni *valori sintetici*, per esempio il valore atteso $\mathbb{E}[X]$

- ▷ calcolato in base alla *distribuzione di probabilità* di X
- ▷ stimato in base a precedenti (e simili) esperienze

Rappresentazione formale nell'impostazione discreta:

$$X = \begin{cases} x_1 & \text{se } \mathcal{E}_1 \\ x_2 & \text{se } \mathcal{E}_2 \\ \dots & \dots \\ x_m & \text{se } \mathcal{E}_m \\ 0 & \text{se } \bar{\mathcal{E}} \end{cases}$$

dove $x_m = x_{\max}$, e $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_m$ ordinati secondo gravità crescente

\mathcal{E} = verificarsi del sinistro che comporta danno, qualunque sia la gravità

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \dots \cup \mathcal{E}_m$$

$\bar{\mathcal{E}}$ = assenza di sinistro (come nel Caso 2)

Caso 3b - Benefici in caso di invalidità permanente; caso monopériodale

Un datore di lavoro assume il rischio di pagare un dato importo ai dipendenti in caso di invalidità permanente dovuta a infortunio

Ipotesi:

- (a) orizzonte temporale = 1 anno
- (b) n dipendenti esposti al rischio di infortunio
- (c) per ciascun dipendente, importo del beneficio = C

K = numero aleatorio di infortuni (rischio) nel periodo

Importo totale aleatorio (impatto) pagato dal datore di lavoro:

$$X = C K$$

“Rischio”: definizioni (*cont.*)

Determinazioni possibili di K : $0, 1, \dots, n$

Corrispondenti determinazioni di X : $0, C, \dots, nC$

Importo totale aleatorio riassunto da *valori sintetici*, in particolare il valore atteso

Valore atteso, $\mathbb{E}[X]$, dell'importo totale di benefici:

$$\mathbb{E}[X] = C \mathbb{E}[K]$$

Se l'ipotesi (c) è sostituita da

(c') per il dipendente j , $j = 1, 2, \dots, n$, il beneficio è $C^{(j)}$ (ad es. collegato alla remunerazione)

allora il beneficio totale dipende anche da quali dipendenti sono colpiti da infortunio

“Rischio”: definizioni (cont.)

Formalmente, con riferimento al dipendente j si definisce la v.a. $X^{(j)}$:

$$X^{(j)} = \begin{cases} C^{(j)} & \text{in caso di infortunio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Importo totale pagato:

$$X = \sum_{j=1}^n X^{(j)}$$

Osservazione

Il rischio (che comporta il pagamento X) per il datore di lavoro è di fatto un insieme (o *pool*) di rischi individuali (possibile infortunio del dipendente j e relativo pagamento C , o $C^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, n$)

Caso 3c - Benefici in caso di invalidità permanente; caso pluriperiodale

Generalizzazione del Caso 3b: l'orizzonte temporale consiste di m anni, in particolare $m > 1$ (ad es. $m = 5$ o $m = 10$)

- n dipendenti (all'inizio del periodo di m anni) esposti al rischio di invalidità permanente a causa di infortunio
- Si supponga che ciascun dipendente colpito da invalidità permanente (in un anno qualsiasi) sia sostituito, all'inizio dell'anno successivo, da un altro dipendente
- Non sono ammessi
 - ▷ nuovi ingressi (oltre alle sostituzioni)
 - ▷ uscite per altre cause (diverse da invalidità permanente)
- Quindi, n dipendenti sono esposti al rischio all'inizio di ciascun anno
- Il beneficio individuale C è pagato alla fine dell'anno in cui si verifica l'infortunio

“Rischio”: definizioni (cont.)

Siano K_1, K_2, \dots, K_m i numeri aleatori di infortuni nei vari anni

Importo aleatorio pagato dal datore di lavoro al tempo t (fine dell'anno t), per $t = 1, 2, \dots, m$

$$X_t = C K_t$$

Se definiamo il pagamento totale come

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_m$$

trascuriamo il *valore temporale del denaro* (cioè assumiamo un tasso di interesse nullo)

Caso 3d - Incendio in una fabbrica

Riferimento ad un periodo fissato (per esempio 1 anno)

Una fabbrica può essere danneggiata da incendio, una o più volte nel periodo fissato

Ciascun verificarsi di incendio \Rightarrow danno di importo aleatorio

Notare la coesistenza di caratteristiche del

Caso 3a (aleatorietà del danno)

Case 3b (numero aleatorio di sinistri che comportano danno)

Formalmente, si definiscano

v.a. N = numero aleatorio di sinistri (incendi) nel periodo fissato

v.a. X_k = danno causato dal k -esimo sinistro

“Rischio”: definizioni (cont.)

Danno aleatorio totale X

$$X = \begin{cases} 0 & \text{se } N = 0 \\ X_1 + \dots + X_N & \text{se } N > 0 \end{cases}$$

Per ogni X_k

$X_k > 0$ (il caso di danno nullo è rappresentato da $N = 0$)

danno massimo x_{\max} da stabilire, per esempio il valore della fabbrica; però

- ▷ è improbabile che, in caso di più incendi nel periodo, ciascun incendio distrugga completamente la fabbrica
- ▷ problema da affrontare mediante appropriata assegnazione della struttura probabilistica delle v.a. N, X_1, \dots, X_N

Per il numero aleatorio N , si possono assumere

come determinazioni possibili i numeri interi $0, 1, 2, \dots$

una (ragionevole) determinazione massima n_{\max}

⇒ determinazioni possibili $0, 1, 2, \dots, n_{\max}$

“Riassunto” delle variabili aleatorie mediante:

$\mathbb{E}[N]$ = valore atteso del numero di sinistri (incendi) nel periodo

$\mathbb{E}[X_k]$ = valore atteso del danno causato dal k -esimo sinistro,
 $k = 1, 2, \dots, n_{\max}$

$\mathbb{E}[X]$ = valore atteso del danno totale

Valori attesi

calcolati secondo le distribuzioni di probabilità ed ipotesi appropriate

stimati in base a precedenti (e simili) esperienze

Ipotesi comuni:

$$\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = \dots = \mathbb{E}[X_{n_{\max}}]$$

indipendenza tra le v.a. N, X_1, X_2, \dots

Allora

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1] \mathbb{E}[N]$$

cioè “fattorizzazione”

Osservazione

Danni alla fabbrica (edifici, macchine, attrezzature, ecc.): esempio di *danni diretti*

Riduzione del livello normale di produzione, e quindi degli utili usualmente generati dall’attività produttiva, causata dai danni diretti: esempio di *danni indiretti*

Impatto totale = danni diretti + danni indiretti

Caso 3e - Responsabilità civile auto

La guida di un autoveicolo può causare danni a beni (ad esempio, autoveicoli) di terzi, o danni a persone (pedoni, o conducenti di altri veicoli e persone trasportate) \Rightarrow responsabilità civile verso terzi

Con riferimento ad un dato periodo (per es., 1 anno), si definisca (come nel Caso 3d) la v.a. N numero di sinistri (incidenti con responsabilità civile)

Si indichi con X_k il danno causato dal k -esimo sinistro

Danno totale nel periodo, X , definito dalla

$$X = \begin{cases} 0 & \text{se } N = 0 \\ X_1 + \cdots + X_N & \text{se } N > 0 \end{cases}$$

I massimi importi per le X_k non possono essere stabiliti, in quanto i beni danneggiati (o il tipo o gravità dei danni a persone) non sono predefiniti

RISCHI RELATIVI ALLA DURATA DI VITA INDIVIDUALE

Durata di vita di un individuo adulto suddivisa in due periodi:

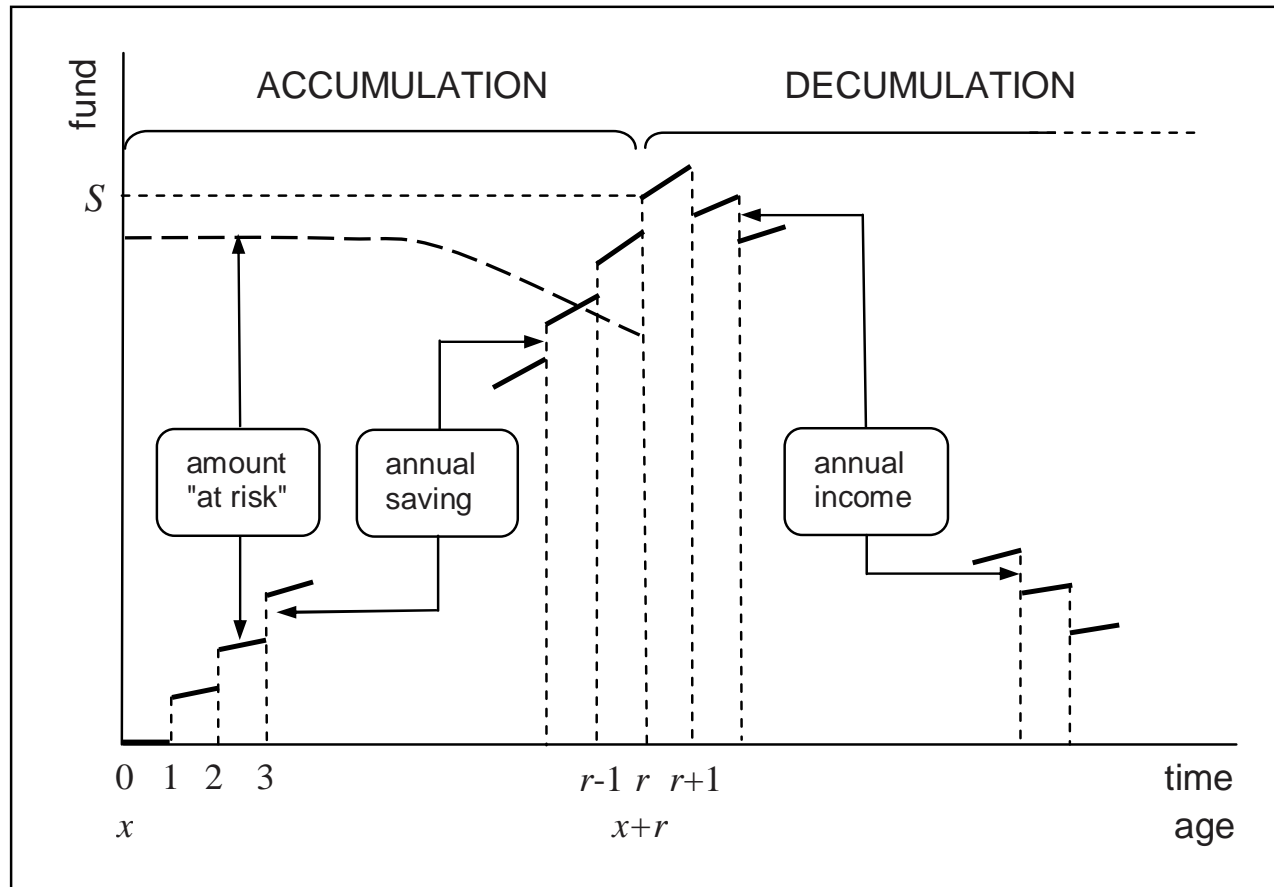
- *periodo di attività lavorativa* - reddito da lavoro ed accumulazione di risorse per finanziare il reddito post-pensionamento \Rightarrow *fase di accumulazione*
- *periodo di pensionamento* - reddito ottenuto dalle risorse accumulate \Rightarrow *fase di decumulazione*

In entrambe le fasi presenza di rischi nella gestione delle risorse

Rischi derivanti dall'aleatorietà della durata di vita:

- accumulazione di risorse da usare durante il periodo di pensionamento
- rischio di decesso durante il periodo di attività lavorativa
- reddito durante il periodo di pensionamento

“Rischio”: definizioni (cont.)



Periodi di accumulazione e decumulazione

Caso 4a - Necessità di risorse disponibili al tempo di pensionamento

Necessità di disporre di un importo, S , da convertire al momento di pensionamento in una sequenza di importi \Rightarrow reddito post-pensionamento

Sia r il momento di pensionamento

Piano di accumulazione: sequenza di importi c_1, c_2, \dots, c_r , da versare durante il periodo di attività, ad es. annualmente agli istanti $1, 2, \dots, r$, ad es. a un'istituzione finanziaria (“salti” durante la fase di accumulazione)

Formalmente:

$$S = \gamma(c_1, c_2, \dots, c_r)$$

In particolare, se i è una stima del tasso di interesse durante l'accumulazione:

$$S = c_1 (1 + i)^{r-1} + c_2 (1 + i)^{r-2} + \dots + c_r$$

“Rischio”: definizioni (cont.)

Si supponga che l'effettiva sequenza di versamenti segua esattamente il piano di accumulazione

In relazione al tasso di interesse i :

- se i è garantito, il valore accumulato S è certo
 - ▷ rischio di investimento a carico dell'istituzione finanziaria
 - ▷ processo di accumulazione risk-free per l'individuo
- se l'istituzione finanziaria non fornisce alcuna garanzia di tasso, il processo di accumulazione può risultare in un importo minore di S , a causa di variazioni nel tasso di interesse, nel valore dei titoli acquistati, ecc
 - ▷ importo S aleatorio
 - ▷ rischio di investimento a carico dell'individuo

Caso 4b - Decesso durante il periodo di attività

Il processo di accumulazione è in corso

In caso di decesso (prima dell'istante di pensionamento r), il processo di accumulazione è interrotto \Rightarrow importo accumulato minore di S

Il decesso può causare problemi finanziari alla famiglia

Difficoltà di quantificare in termini monetari le conseguenze del decesso. Necessità di stimare le conseguenze (aleatorie)

Si assuma che

- non siano disponibili altre risorse, oltre al fondo accumulato
- la linea tratteggiata in figura possa rappresentare una stima delle conseguenze aleatorie in termini monetari

In ogni anno, la differenza (se positiva) tra la stima e le risorse accumulate è “a rischio”, a causa di mancanza di risorse

Caso 4c - Esaurimento progressivo delle risorse disponibili al pensionamento

Si supponga che l'importo S sia disponibile al pensionamento, ed impiegato per costituire un fondo

Si assuma l'anno come unità temporale

Sia $t = 0$ l'istante di pensionamento

Per ottenere il reddito post-pensionamento, il soggetto preleva dal fondo al tempo t l'importo b_t ($t = 1, 2, \dots$)

Si supponga che il fondo sia gestito da un'istituzione finanziaria che garantisce un tasso annuo d'interesse costante i

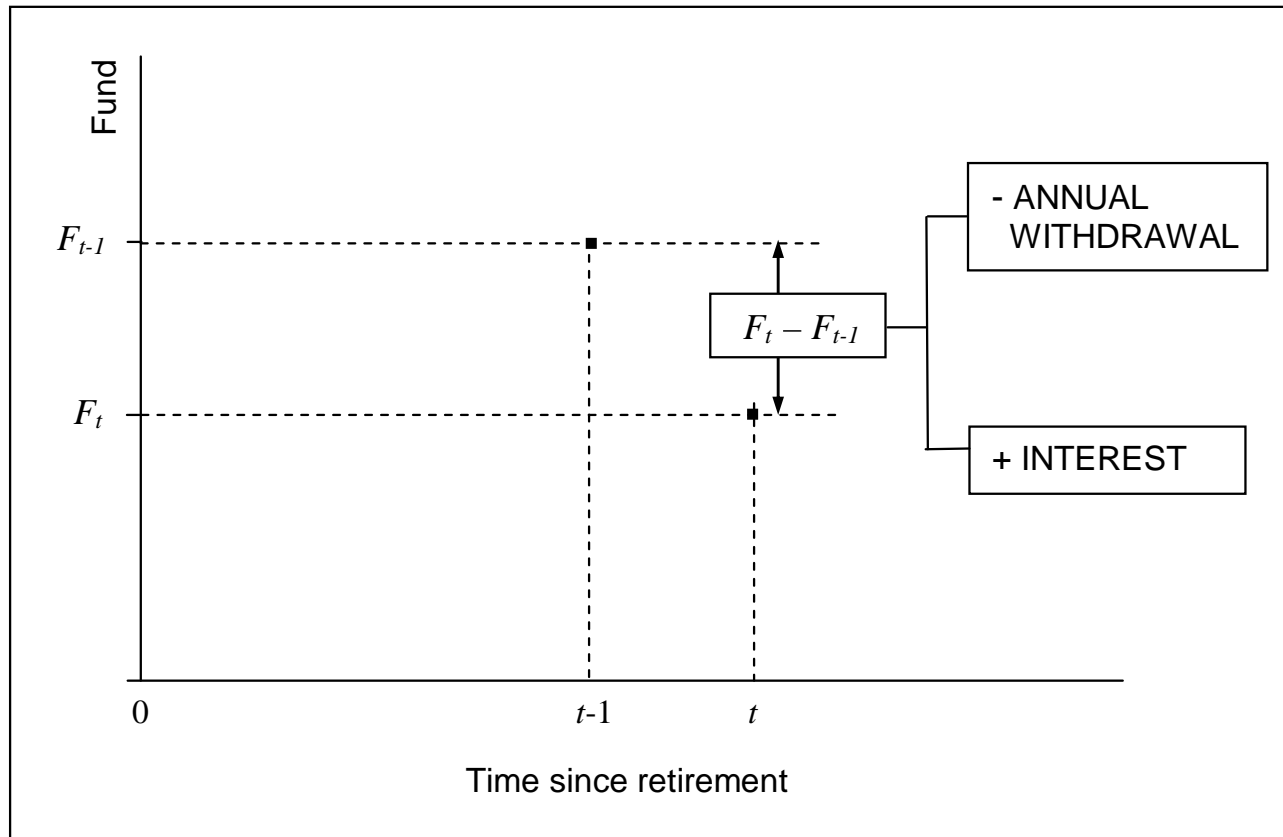
Sia F_t il fondo al tempo t , subito dopo il prelevamento di b_t . Allora

$$F_t = F_{t-1}(1 + i) - b_t \quad \text{per } t = 1, 2, \dots$$

con $F_0 = S$. Variazione annua del fondo (v. figura) data da

$$F_t - F_{t-1} = F_{t-1}i - b_t \quad \text{per } t = 1, 2, \dots$$

“Rischio”: definizioni (cont.)



Variazione annua del fondo

“Rischio”: definizioni (cont.)

L'andamento del fondo dipende dalla sequenza b_1, b_2, \dots

In particolare, se per ogni t il prelevamento è uguale all'interesse annuo sul fondo, cioè

$$b_t = F_{t-1} i$$

allora

$$F_t = S$$

per ogni t , e quindi il prelevamento è costante

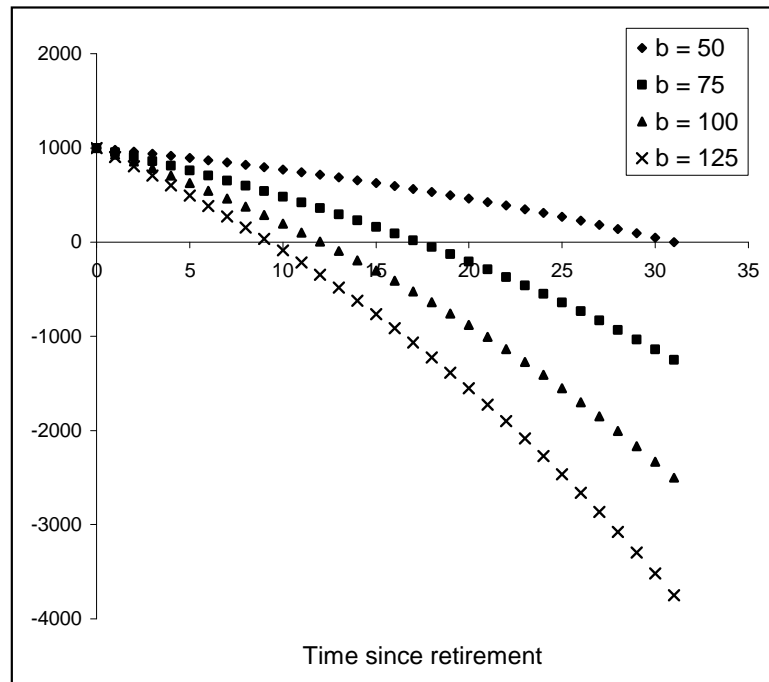
$$b = S i$$

Se si assume un prelevamento costante maggiore dell'interesse annuo

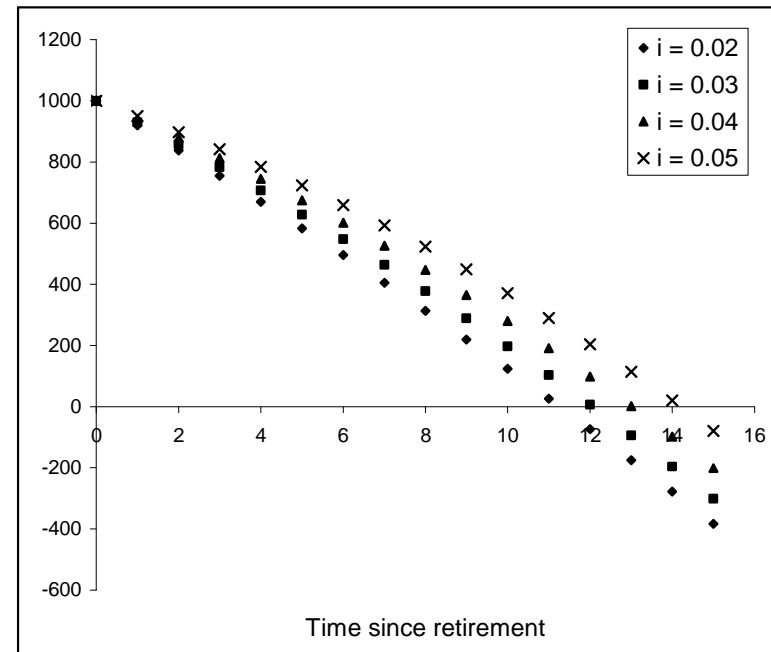
$$b > S i$$

allora il processo di prelevamento esaurisce prima o poi il fondo (se il soggetto è in vita)

“Rischio”: definizioni (cont.)



(a)



(b)

Andamento del fondo. $S = 1\,000$; (a) $i = 0.03$; (b) $b = 100$

Si ha infatti:

$$F_t < F_{t-1} \quad \text{per } t = 1, 2, \dots$$

e si può determinare il tempo t_{\max} tale che

$$F_{t_{\max}} \geq 0 \quad \text{e} \quad F_{t_{\max}+1} < 0$$

Il tempo t_{\max} dipende dall'importo b e dal tasso di interesse i

Sequenza di t_{\max} prelevamenti annui costanti b (integrata dal prelevamento finale al tempo $t_{\max} + 1$) \Rightarrow *rendita certa*

Confronto del tempo di esaurimento t_{\max} con la durata residua di vita del soggetto (dal pensionamento)

Sia $y = x + r$ l'età al pensionamento (ad es. $y = 65$)

“Rischio”: definizioni (cont.)

La durata residua di vita ad età y è una v.a., T_y

Sia ω la massima età raggiungibile (o *età estrema*), ad es. $\omega = 110$

T_y può assumere tutte le determinazioni tra 0 e $\omega - y$

se $T_y < t_{\max} \Rightarrow$ fondo residuo disponibile (eredità)

se $T_y > t_{\max} \Rightarrow T_y - t_{\max}$ anni senza possibilità di prelevamenti

L'importo b (per un dato tasso d'interesse i) può essere scelto confrontando il tempo di esaurimento t_{\max} con qualche valore sintetico della durata aleatoria di vita, ad es. la vita residua attesa $\mathbb{E}[T_y]$, o la vita residua modale (cioè di massima probabilità) $\text{Mode}[T_y]$

“Rischio”: definizioni (cont.)

Per esempio, si scelga b tale che

$$t_{\max} \approx \text{Mode}[T_y]$$

⇒ con elevata probabilità

tempo di esaurimento = durata residua di vita

Sono possibili gli eventi $T_y > t_{\max}$ e $T_y < t_{\max}$

⇒ il soggetto sopporta il rischio derivante dall'aleatorietà della sua durata di vita

Si scelga b tale che

$$t_{\max} = \omega - y$$

⇒ eliminato il rischio di esaurire le risorse, ma importo b molto modesto

1.3 GESTIONE DEI RISCHI

ASPETTI GENERALI

Enterprise Risk Management (ERM): disciplina che analizza i rischi e relativi impatti sopportati da un'impresa industriale, una banca, un assicuratore, un ente pubblico, ecc., e suggerisce azioni per far fronte ai rischi stessi (incluso il trasferimento ad assicuratori - riassicuratori)

Applicabilità anche a individui, o famiglie (*Personal Risk Management*)

Tipi di rischi e azioni da intraprendere dipendono, in larga misura, dal particolare tipo di attività considerata: una banca sopporta rischi collegati alla sua specifica attività, altri rischi riguardano un'industria, o una compagnia di navigazione aerea, ecc.

Consideriamo aspetti generali e comuni a varie attività

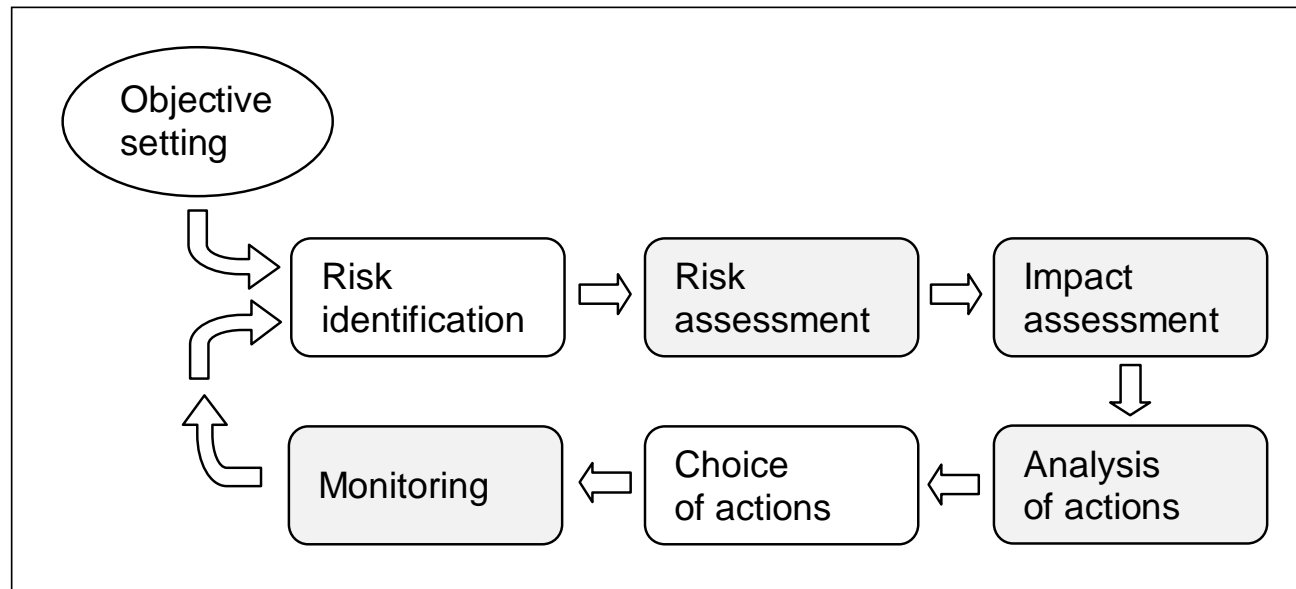
Implementazione dei principi di ERM mediante il *processo di Risk Management (RM)*

Dati gli *obiettivi*

- ▷ profitto (e creazione di valore)
- ▷ solvibilità (capacità di far fronte agli impegni)
- ▷ quote di mercato
- ▷ ...

Il processo di RM si articola in fasi, che costituiscono un “ciclo” (vedi Figura)

- individuazione dei rischi (risk identification)
- quantificazione dei rischi (risk assessment)
- quantificazione dei relativi impatti (impact assessment)
- analisi delle azioni disponibili
- scelta di una azione, o combinazione di azioni
- monitoraggio



Il processo di Risk Management

Le fasi del processo di RM segnate in grigio coinvolgono aspetti quantitativi \Rightarrow *Quantitative Risk Management (QRM)*

IL PROCESSO DI RISK MANAGEMENT

Individuazione dei rischi

Questa fase si propone di identificare le cause di esposizione a possibili danni in un'impresa (o famiglia o individuo), cause che dipendono dal particolare tipo di attività considerato

Quantificazione dei rischi

Si assegnano distribuzioni di probabilità ai vari rischi che interessano

Riferimento ai **casi 3b** e **3c**: assegnazione della distribuzione di probabilità al numero aleatorio K di sinistri in un anno, o ai numeri aleatori K_1, K_2, \dots di sinistri nei vari anni

Per semplicità, spesso si considerano soltanto valori sintetici, ad esempio valori medi

Quantificazione dell'impatto

Date le distribuzioni di probabilità dei rischi, si ricavano le distribuzioni di probabilità dei risultati che interessano (cash flow, utili, ecc.)

Riferimento ai **casi 3b** e **3c**: calcolo della distribuzione di probabilità del pagamento aleatorio X in un anno, o dei pagamenti aleatori X_1, X_2, \dots nei vari anni

Per semplicità, spesso si calcolano soltanto valori sintetici

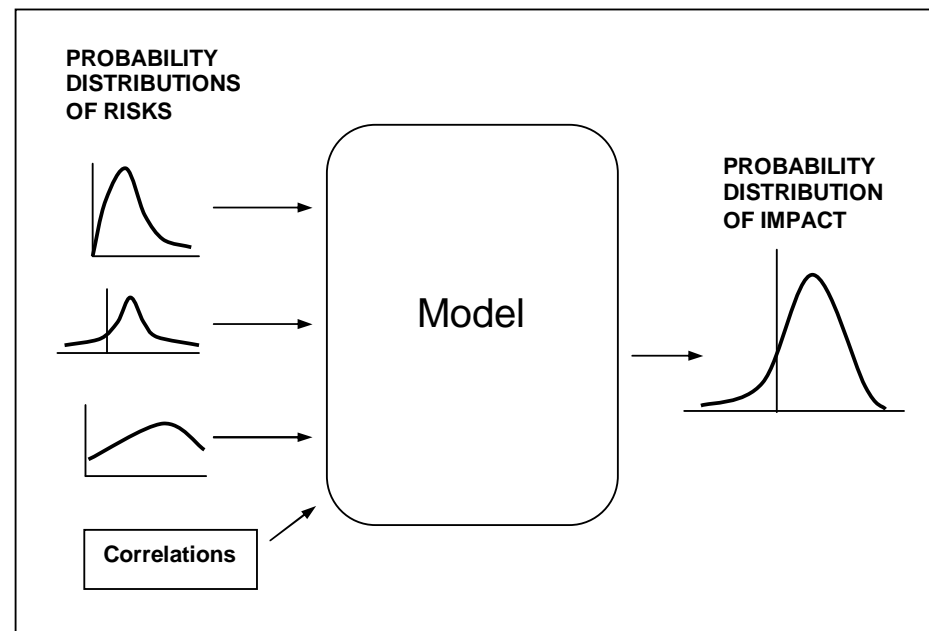
Osservazione

Casi 3b e 3c: passaggio immediato da quantificazione rischio a quantificazione impatto

Situazioni reali possono richiedere calcoli molto più complicati

Approcci possibili

- (1) stocastico: da distribuzioni di probabilità a distribuzioni di probabilità (vedi Figura) \Rightarrow solitamente richiede procedure di simulazione stocastica
- (2) deterministico: da stima numerica per ciascun rischio a stima numerica dell'impatto
- (3) deterministico "iterato" (what-if analysis): applicazione ripetuta di (2) per varie stime numeriche per ciascun rischio



Azioni di Risk Management

Azioni volte a

1. Loss control
 - 1.1 loss prevention
 - 1.2 loss reduction
 - 1.3 risk avoidance
2. Loss financing
 - 2.1 ritenzione
 - 2.2 assicurazione
 - 2.3 hedging
 - 2.4 altri trasferimenti di rischio
3. Internal risk reduction
 - 3.1 diversificazione
 - 3.2 investimenti in informazione

Riferimento al **Caso 3d**

Azioni di Loss control si propongono di ridurre il danno totale atteso $\mathbb{E}[X]$

In particolare

- ▷ *Loss prevention*: azioni volte a ridurre il numero atteso di sinistri $\mathbb{E}[N]$ (per esempio: appropriati impianti elettrici)
- ▷ *Loss reduction*: azioni volte a ridurre la gravità attesa di ciascun danno, $\mathbb{E}[X_k]$, $k = 1, 2, \dots, N$ (per esempio: evitare la propagazione di un incendio)
- ▷ *Risk avoidance*: riduzione (o azzeramento) del livello di attività rischiose (per esempio, passaggio ad attività meno rischiose)
⇒ possibile riduzione degli utili

Loss financing: un'ampia gamma di metodi per ottenere risorse finanziarie con le quali coprire possibili perdite

- ▷ *Ritenzione (o auto-assicurazione)*: i danni sono sopportati dalla impresa stessa
- ▷ *Trasferimento di rischi*: usualmente mediante assicurazione
Nota: trasferimento di rischi = trasferimento del relativo impatto finanziario
- ▷ *Hedging*: solitamente basato sull'uso di derivati finanziari (futures, forwards, swaps, options, ecc.); per esempio, un'impresa che usa petrolio nel processo produttivo è esposta al rischio di perdite causate da imprevisti aumenti del prezzo del petrolio, e può far fronte al rischio mediante un contratto forward, in base al quale il fornitore di petrolio si impegna a rifornire l'utente di una data quantità di petrolio in una data specificata al prezzo stabilito nel contratto forward (definizione più generale: vedi seguito)

Internal risk reduction

- ▷ *Diversificazione*: riguarda tipicamente strategie di investimento e rischi relativi, e consiste nell'investire importi relativamente piccoli in un grande varietà di tipi di titoli, anziché investire l'intero ammontare disponibile in un unico tipo di titolo
- ▷ *Investimento in informazione*: appropriati investimenti possono migliorare la "qualità" di stime e previsioni; ne risulta una minore variabilità attorno ai valori attesi, sicché possono essere effettuate più accurate scelte di azioni a fronte dei rischi

La scelta di un mix di azioni di RM si basa su una quantificazione di costi e benefici di ciascuna azione, cioè sulla analisi delle azioni (uno dei compiti del QRM)

Assicurazione ed auto-assicurazione

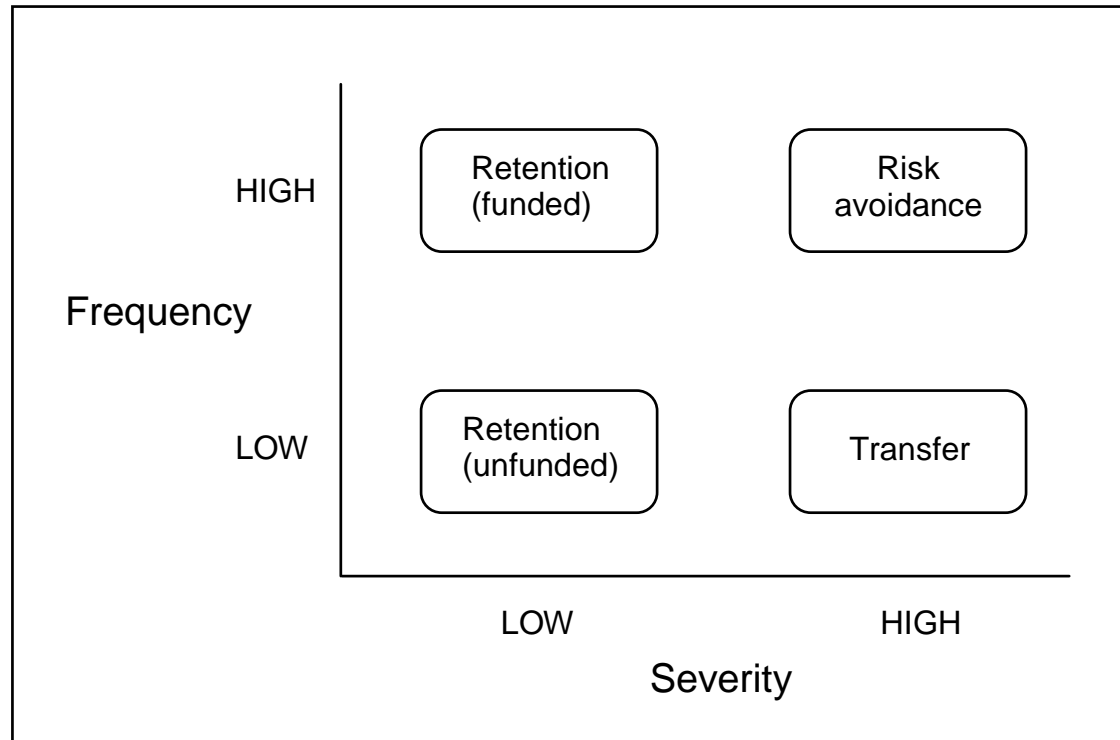
Risultati ottenuti nelle fasi di individuazione e quantificazione dei rischi e relativi impatti \Rightarrow dati necessari al fine di prendere decisioni, in particolare:

- (a) quali rischi (puri) possono essere ritenuti e quali devono essere trasferiti
- (b) come finanziare i possibili danni causati dai rischi ritenuti
- (c) quale forma di trasferimento di rischi scegliere

(a) Linee-guida per le decisioni possono seguire la *logica frequenza-gravità* (vedi Figura seguente)

- rischi che causano possibili perdite di bassa gravità (che possono essere coperte con gli usuali mezzi finanziari dell'impresa) possono essere ritenuti
- rischi che causano possibili perdite di elevata gravità (e quindi di forte impatto sull'impresa), nonostante una bassa frequenza, devono essere trasferiti, in particolare ad un assicuratore

Gestione dei rischi (cont.)



Gestione dei rischi in funzione del loro possibile impatto

Riferimento al **caso 3d**

- valutazione della *frequenza* basata sulle probabilità di accadimento di uno o più sinistri
- valutazione della *gravità* basata sul danno medio (o sul danno modale) per sinistro

(b) Finanziamento dei danni (originati da rischi di modesta gravità, ritenuti)

- bassa frequenza: i danni non costituiscono un importante problema, e quindi possono essere coperti
 - ▷ mediante risorse interne
 - cash-flow correnti, prodotti dalla normale attività
 - capitale proprio
 - ▷ mediante risorse esterne, cioè prestiti

⇒ “unfunded”
- alta frequenza: finanziati in anticipo con specifica allocazione di attivi ⇒ “funded”

(c) “Trasferimento”

- (1) non completa ritenzione
- (2) può coinvolgere varie controparti

In relazione a (1): un rischio può essere trasferito parzialmente, trasferendo cioè solo la parte più “grave” del possibile danno

La logica di un trasferimento di rischio (ad un assicuratore) è la suddivisione del danno in due parti, una ritenuta dall'impresa assicurata e l'altra pagata dall'assicuratore

Riferimento al **Caso 3d**: il danno aleatorio causato dal k -esimo sinistro (incendio) è ripartito come segue:

$$X_k = X_k^{[\text{ret}]} + X_k^{[\text{transf}]}$$

con $X_k^{[\text{transf}]}$ determinato secondo le condizioni stabilite nel contratto di assicurazione; può essere rappresentato mediante una funzione del danno aleatorio X_k

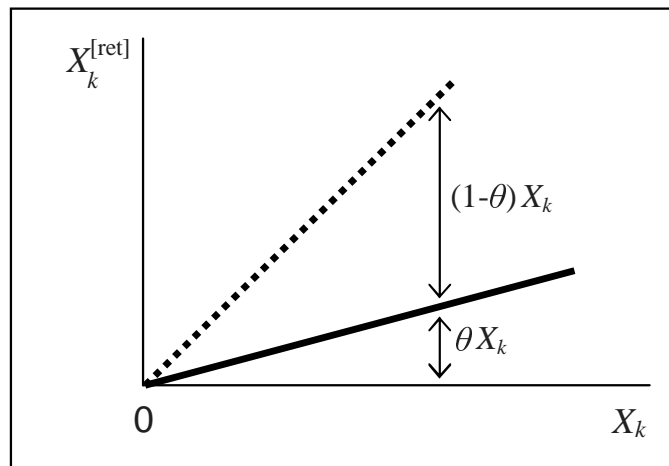
$$X_k^{[\text{transf}]} = \psi(X_k)$$

Esempio 1

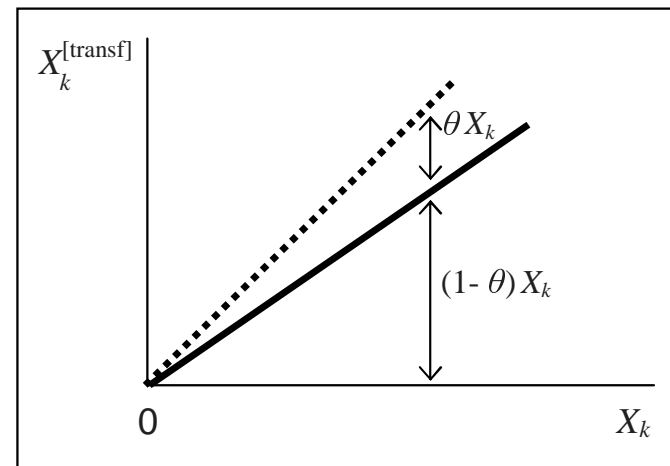
Aliquota di scoperto θ

$$X_k^{[\text{ret}]} = \theta X_k$$

$$X_k^{[\text{transf}]} = (1 - \theta) X_k$$



(a)



(b)

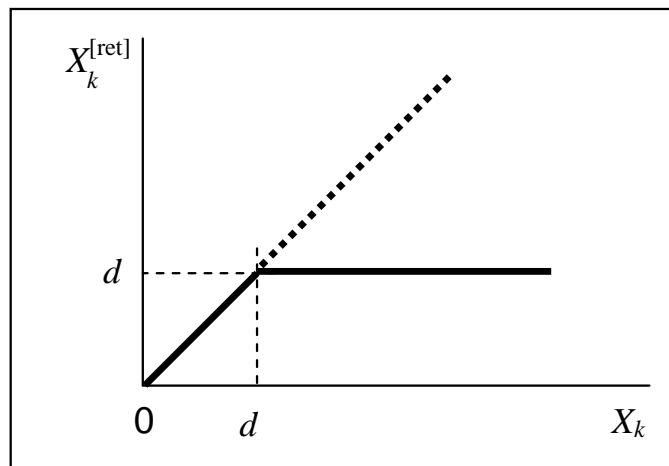
Esempio di trasferimento di rischio: aliquota di scoperto

Esempio 2

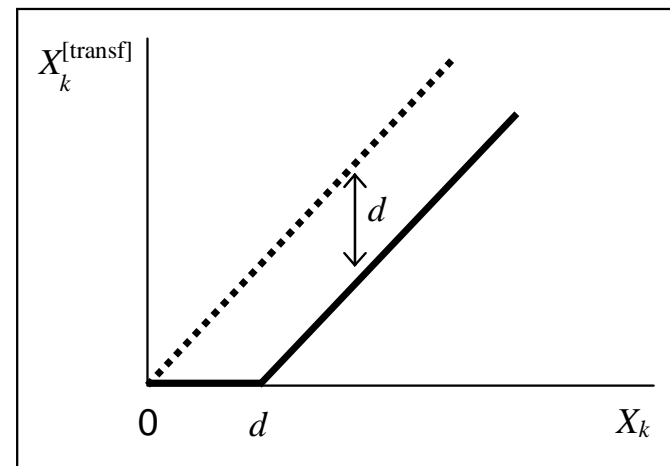
Franchigia fissa d

$$X_k^{[\text{ret}]} = \min\{X_k, d\}$$

$$X_k^{[\text{transf}]} = \max\{0, X_k - d\}$$



(a)



(b)

Esempio di trasferimento di rischio: franchigia fissa

Aliquota di scoperto:

- ▷ tutti danni, qualunque sia l'importo, originano pagamenti dell'assicuratore
- ▷ per danni molto elevati, l'ammontare ritenuto può essere molto grande

Franchigia fissa, più interessante perché:

- ▷ piccoli danni non comportano pagamenti dell'assicuratore
⇒ premio assicurativo minore
- ▷ in corrispondenza a danni elevati, l'assicuratore paga l'intero ammontare sopra la franchigia (se non è stabilito un limite superiore)

In relazione a (2): l'usuale trasferimento di rischio coinvolge, come controparte, un assicuratore (o più assicuratori)

Nella pratica del RM, si procede a un'accurata analisi di tutte le opportunità assicurative. Coperture assicurative appropriate devono essere scelte per ogni tipo di rischio (incendio, responsabilità civile, ecc.) che interessa l'impresa. Il risultato è la definizione di un *programma assicurativo*, che può coinvolgere più assicuratori

Altri trasferimenti sono possibili. In particolare, grandi imprese possono trasferire rischi ai mercati finanziari mediante emissione di specifici bond; anche gli assicuratori possono ricorrere a trasferimenti "alternativi" (*ART = alternative risk transfers*) per trasferire rischi ceduti da imprese

Una particolare forma di trasferimento di rischi è basata sui *captive insurers*, imprese assicuratrici fondate da grandi gruppi (ad es. industriali) per soddisfare i bisogni assicurativi delle imprese del gruppo. Il captive insurer può essere interpretato come un centro di profitto all'interno del gruppo

Monitoraggio

I risultati ottenuti mediante le azioni di risk management devono essere verificati

Obiettivi della fase di *monitoraggio* sono:

- (a) controllare l'efficacia delle azioni intraprese
- (b) individuare nuove azioni qualora variazioni nello scenario lo suggeriscano
- (c) modificare distribuzioni di probabilità dei rischi in base alle osservazioni (per es. mediante modelli di inferenza bayesiana)
⇒ uno dei compiti del QRM

Il monitoraggio non è la fase “finale” del processo di risk management: dopo il monitoraggio, il processo inizia nuovamente, con individuazione e quantificazione dei rischi in uno scenario eventualmente modificato, ecc. ⇒ ciclo “senza fine”

STRATEGIE DI HEDGING

I flussi aleatori

Sequenza “primaria” di flussi: outflow aleatori X_t , $t = 1, 2, \dots$ (costi, spese, perdite, ecc.)

Siano $X_t \geq 0$, $t = 1, 2, \dots$, e tutti identicamente distribuiti

Le determinazioni di X_t , $t = 1, 2, \dots$, fluttuano nel tempo
 \Rightarrow situazione di rischio

Obiettivo dello hedging: riduzione della volatilità

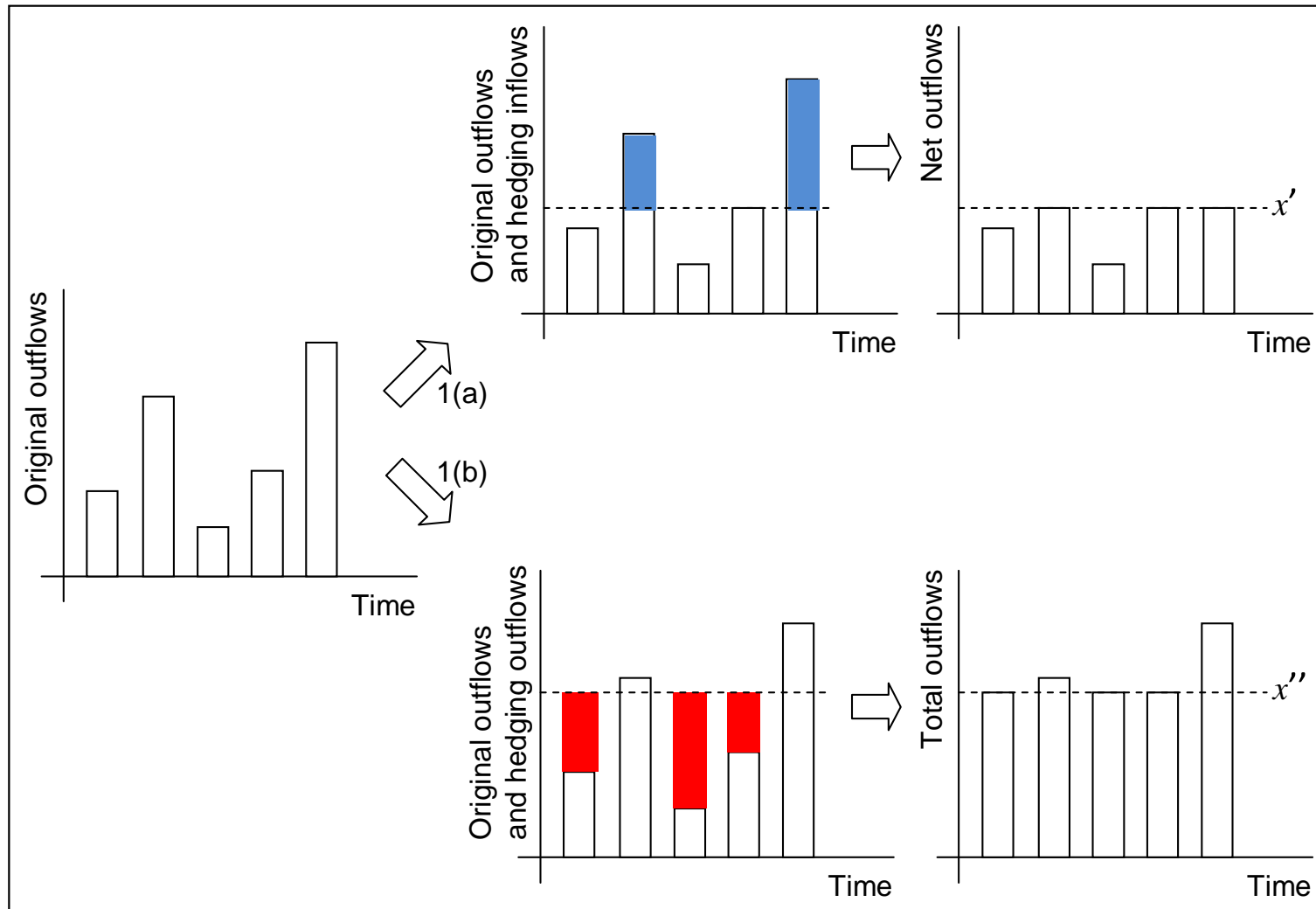
| OUTFLOW X_t | $[X_t = \text{high}]$ | $[X_t = \text{low}]$ |
|------------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1. HEDGING FLOW | | |
| (a) Inflow Y_t | $[Y_t = \text{high}]$ | $[Y_t = \text{low}]$ |
| (b) Outflow Z_t | $[Z_t = \text{low}]$ | $[Z_t = \text{high}]$ |
| 2. HEDGING SWAP | | |
| Inflow / Outflow W_t | $[W_t < 0]$ | $[W_t > 0]$ |

Strategie di hedging

Strategie possibili per “mitigare” il rischio causato da X :

1. Associare all’outflow aleatorio X_t un flusso di hedging, tale che la somma dei valori dei due flussi abbia variabilità minore di quella di X_t ; possibili implementazioni:
 - (a) il flusso di hedging Y_t ha segno opposto al segno di X_t (e quindi Y_t è un inflow), ed è tanto maggiore quanto maggiore è $X_t \Rightarrow$ riduzione di variabilità ottenuta mediante un flusso netto $X_t + Y_t$ minore (o uguale) a X_t e in particolare non maggiore di un prefissato limite superiore x' (*cap*)
 - (b) il flusso di hedging Z_t ha lo stesso segno di X_t (e quindi Z_t è un outflow), ed è tanto minore quanto maggiore è $X_t \Rightarrow$ riduzione di variabilità ottenuta mediante un flusso totale $X_t + Z_t$ maggiore (o uguale) a X_t e in particolare non minore di un prefissato limite inferiore x'' (*floor*)

Vedi Figura seguente



Strategie di hedging (1)

2. Scegliere un limite superiore $x^{(1)}$ e uno inferiore $x^{(2)}$; sia W_t il flusso di hedging tale che:

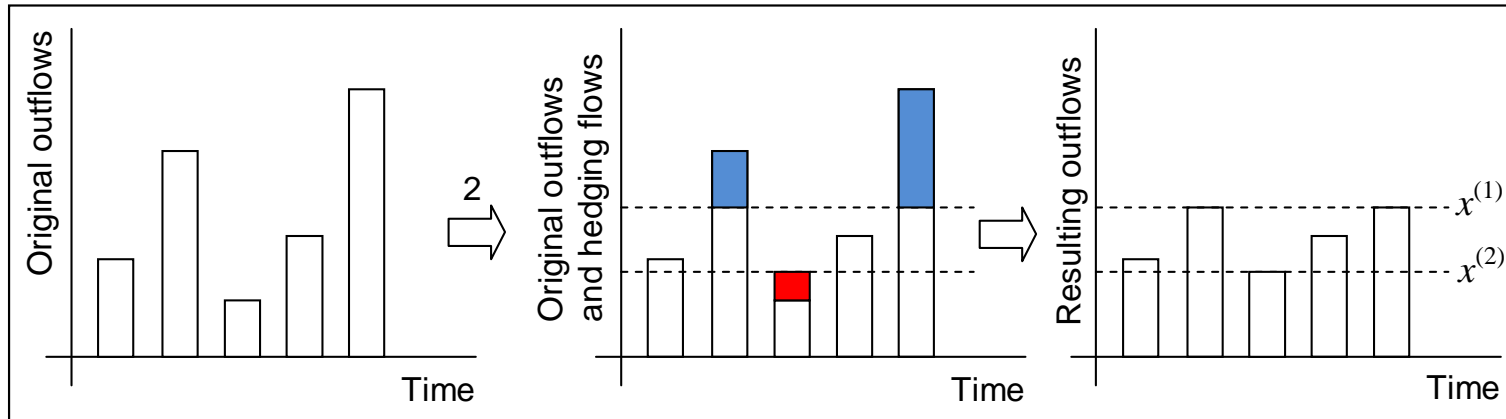
$$x^{(1)} \leq X_t + W_t \leq x^{(2)}$$

Quindi:

- ▷ se $X_t > x^{(1)} \Rightarrow$ segno di W_t opposto a quello di $X_t \Rightarrow W_t$ è un inflow
- ▷ se $X_t < x^{(2)} \Rightarrow$ segno di W_t uguale a quello di $X_t \Rightarrow W_t$ è un outflow

In particolare, se $x^{(1)} = x^{(2)} \Rightarrow X_t + W_t = \text{cost.} \Rightarrow$ flusso aleatorio X_t sostituito da flusso certo, secondo logica dello swap

Vedi Figura seguente

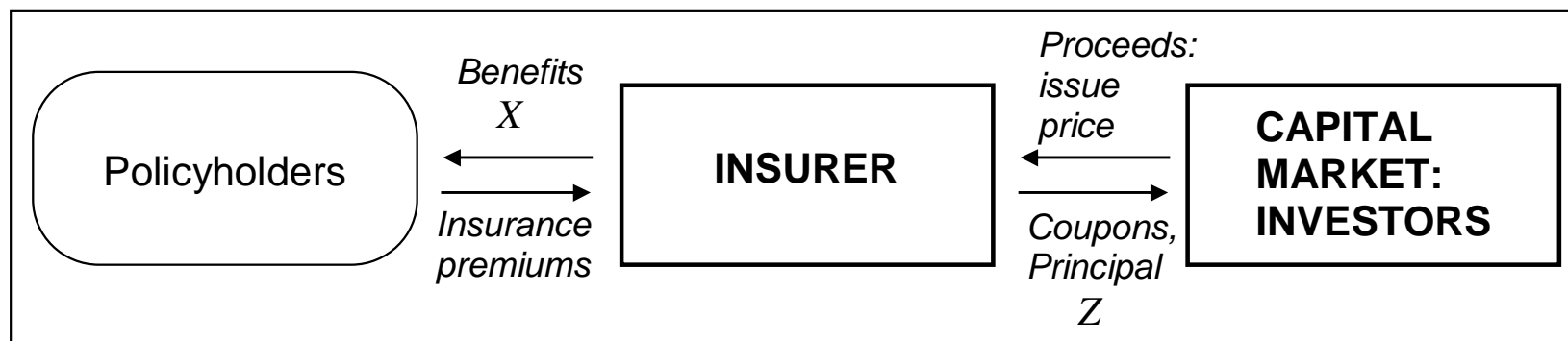


Strategie di hedging (2)

Esempi

- Strategia 1(a) implementabile mediante assicurazione / riassicurazione: per ridurre la variabilità delle perdite, perdite X_t di elevato ammontare (parzialmente) coperte da benefici Y_t

- Strategia 1(b) implementabile (nell'ambito degli *Alternative Risk Transfers, ARTs*) mediante *insurance-linked securities (ILS)* emesse da assicuratore (o riassicuratore), per hedging di eventi catastrofici. Esempi: *cat bonds, mortality bonds*



Hedging mediante mortality bond (struttura semplificata)

- 1(b) può essere conseguenza di una particolare struttura di business. Esempio: portafoglio di assicurazioni caso morte e di assicurazioni caso vita (es. rendite vitalizie) \Rightarrow *natural hedging* dei rischi mortalità / longevità. Efficacia dipendente da varie circostanze (vedi più avanti)
- Strategia 2 adottabile quando gli importi di una sequenza di pagamenti sono legati a un tasso di interesse (es. di mercato), come nel caso di rate di ammortamento di un debito \Rightarrow importi minimi e massimi dipendenti da floor e cap sui tassi di interesse (floor e cap determinano il *collar*)

Qualunque strategia (tranne natural hedging) ha un costo determinato dal trasferimento di rischio

Natural hedging del rischio longevità

A livello di impresa assicuratrice o di gruppo (hedging *across LOBs*)

- ▷ coesistenza di portafoglio di rendite vitalizie e di portafoglio di assicurazioni con prestazioni caso morte
- ▷ effettivo
 - se il trend di mortalità si manifesta nella stessa direzione nei vari intervalli di età interessati
 - se i volumi di rendite vitalizie e di assicurazioni caso morte in termini di capitali sotto rischio sono simili
 - maggiore efficacia in imprese di riassicurazione, con portafogli più grandi e diversificati

1.4 QUANTIFICAZIONE DEI RISCHI E DEI RELATIVI IMPATTI: ALCUNI MODELLI

ALCUNE IDEE PRELIMINARI

Quantificazione dei rischi: esprimere in termini quantitativi i rischi ed il relativo impatto su risultati significativi (flussi di cassa, utili, capitale netto, ecc.)

- (a) L'impatto di ciascun rischio è, per definizione stessa di rischio, aleatorio
- (b) Quantunque interessante, la sola valutazione dell'impatto minimo e massimo e quindi del *range* è chiaramente insufficiente a fini operativi, soprattutto se il range è grande
- (c) Valori sintetici, quali misure di "localizzazione" (ad es. il valore atteso e il valore modale) e "dispersione" (ad es. la varianza), sono molto più utili in generale, assieme alle probabilità di eventi quali "il risultato è peggiore di un dato benchmark", o "la perdita è maggiore di una data soglia (critica)"

Quantificazione dei rischi e dei relativi impatti ... (cont.)

Valori sintetici particolarmente utili ai seguenti fini:

- confronti tra varie situazioni di rischio e decisioni relative, ad es. scelta tra ritenere un rischio e trasferirlo mediante assicurazione
- in caso di ritenzione, decisioni circa il finanziamento della possibile perdita, o mediante specifica allocazione di capitale o mediante asset e flussi di cassa ordinari
- dal punto di vista dell'assicuratore, "pricing" di rischi mediante principi di calcolo dei premi

Valori sintetici possono essere ricavati da esperienze precedenti (e simili). Analogamente, probabilità del tipo suddetto possono essere stimate da frequenze osservate

Costruzione di un modello probabilistico "completo" (comunque supportato da esperienze statistiche), comprendente adeguate ipotesi (ad es. correlazioni o indipendenza tra le v.a. input del modello)

⇒ approccio più appropriato alla quantificazione dei rischi

UN MODELLO ELEMENTARE

Riferimento al **Caso 2**. Il modello probabilistico richiede soltanto la probabilità dell'evento (sinistro) \mathcal{E}

$$p = \mathbb{P}[\mathcal{E}]$$

Il valore atteso della perdita X è allora dato da

$$\mathbb{E}[X] = x p$$

la varianza da

$$\text{Var}[X] = (x - \mathbb{E}[X])^2 p + (0 - \mathbb{E}[X])^2 (1 - p) = x^2 p (1 - p)$$

e lo scarto quadratico medio (sqm) da

$$\sigma[X] = \sqrt{\text{Var}[X]} = x \sqrt{p (1 - p)}$$

Quantificazione dei rischi e dei relativi impatti ... (cont.)

Osservazione 1

La distribuzione di probabilità di

$$|\mathcal{E}| = \begin{cases} 1 & \text{con probabilità } p \\ 0 & \text{con probabilità } 1 - p \end{cases}$$

è chiamata *distribuzione di Bernoulli* con parametro p , ed indicata con $\text{Bern}(p)$

La variabile aleatoria $X = x |\mathcal{E}|$ è pertanto detta *rischio bernoulliano*

Osservazione 2

Nei casi considerati la quantificazione del rischio conduce direttamente (o quasi) alla quantificazione dell'impatto \Rightarrow non necessario distinguere le due fasi del processo di RM

NUMERI ALEATORI DI EVENTI ED IMPORTI ALEATORI

Riferimento al **Caso 3a**. Una distribuzione di probabilità va assegnata alla v.a. X , gravità del danno. La distribuzione può essere di tipo discreto o di tipo continuo

Consideriamo il caso discreto. Occorre scegliere un insieme di determinazioni possibili. Siano

$$x_0 = 0, x_1, \dots, x_m$$

le determinazioni possibili della v.a. X (con $x_m = x_{\max}$)

La distribuzione di probabilità è specificata assegnando le seguenti probabilità:

$$p_h = \mathbb{P}[X = x_h]; \quad h = 0, 1, \dots, m$$

con l'ovvio vincolo

$$\sum_{h=0}^m p_h = 1$$

Quantificazione dei rischi e dei relativi impatti ... (cont.)

Il valore atteso è dato da

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{h=0}^m x_h p_h$$

la varianza da

$$\text{Var}[X] = \sum_{h=0}^m (x_h - \mathbb{E}[X])^2 p_h$$

e lo scarto quadratico medio (sqm) da

$$\sigma[X] = \sqrt{\text{Var}[X]}$$

Quantificazione dei rischi e dei relativi impatti ... (cont.)

Esempio

Possibile sinistro \Rightarrow danno X ; determinazioni

0, 100, 200, 300, 400, 500

con probabilità

0.99, 0.002, 0.004, 0.002, 0.001, 0.001

Allora:

$$\mathbb{E}[X] = 2.5; \quad \text{Var}[X] = 763.76; \quad \sigma[X] = 27.64$$

Notare: $X = 0$ significa non verificarsi di alcun sinistro

Quantificazione dei rischi e dei relativi impatti ... (cont.)

Si supponga che un sinistro e quindi danno (quale che sia la gravità) si verifichi; determinazioni possibili:

100, 200, 300, 400, 500

La somma delle relative probabilità deve essere 1; mantenendo i valori “relativi”:

0.2, 0.4, 0.2, 0.1, 0.1

Valore atteso del danno nell'ipotesi che un sinistro si verifichi:

$$\bar{x} = \mathbb{E}[X \mid \text{sinistro}] = 250$$

Valore atteso del danno (in presenza o assenza di sinistro):

$$\mathbb{E}[X] = \bar{x} \mathbb{P}[\text{sinistro}] = 250 \times 0.01 = 2.5$$

Quantificazione dei rischi e dei relativi impatti ... (cont.)

In termini formali, la struttura è la seguente

Probabilità che un sinistro (evento \mathcal{E}) si verifichi (quale che sia la sua gravità):

$$p = \mathbb{P}[\mathcal{E}] = \mathbb{P}[\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \dots \cup \mathcal{E}_m] = \sum_{h=1}^m p_h$$

Probabilità di non sinistro:

$$p_0 = 1 - p$$

In base al teorema delle probabilità subordinate:

$$\mathbb{P}[X = x_h] = \mathbb{P}[X = x_h | \mathcal{E}] \mathbb{P}[\mathcal{E}]; \quad h = 1, 2, \dots, m$$

Distribuzione di probabilità del danno, subordinata al verificarsi di un sinistro:

$$\mathbb{P}[X = x_h | \mathcal{E}] = \frac{\mathbb{P}[X = x_h]}{\mathbb{P}[\mathcal{E}]} = \frac{p_h}{p}; \quad h = 1, 2, \dots, m$$

Quantificazione dei rischi e dei relativi impatti ... (cont.)

Valore atteso del danno, subordinato al verificarsi di un sinistro:

$$\bar{x} = \mathbb{E}[X | \mathcal{E}] = \frac{1}{p} \sum_{h=1}^m x_h p_h$$

Essendo $x_0 = 0$, si ha:

$$\mathbb{E}[X | \mathcal{E}] \mathbb{P}[\mathcal{E}] = \sum_{h=1}^m x_h p_h = \sum_{h=0}^m x_h p_h = \mathbb{E}[X]$$

Valore atteso non subordinato:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X | \mathcal{E}] \mathbb{P}[\mathcal{E}] = \bar{x} p$$

Quantificazione dei rischi e dei relativi impatti ... (cont.)

Riferimento al **Caso 3b**. Beneficio C pagato in caso di invalidità permanente a ciascuno degli n dipendenti

Situazione completamente descritta dal numero aleatorio, K , di infortuni che comportano invalidità permanente

Determinazioni possibili di K : $0, 1, \dots, n \Rightarrow$ assegnazione di una distribuzione di probabilità finita

In particolare, si assuma che

- (a) per ciascun dipendente la probabilità di sinistro è p
- (b) gli infortuni sono eventi indipendenti

allora, K ha distribuzione binomiale, $\text{Bin}(n, p)$

$$\pi_k = \mathbb{P}[K = k] = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}; \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Quantificazione dei rischi e dei relativi impatti ... (cont.)

Osservazione 1

K è interpretabile come somma di n variabili aleatorie indipendenti, ciascuna con distribuzione Bern(p)

Osservazione 2

L'ipotesi (b) può essere non realistica, in quanto eventi come infortuni all'interno di una fabbrica potrebbero essere considerati positivamente correlati

In base a Bin(n, p), valore atteso, varianza e sqm sono dati da:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[K] &= n p \\ \text{Var}[K] &= n p (1 - p) \\ \sigma[K] &= \sqrt{n p (1 - p)}\end{aligned}$$

Osservazione 3

La formula per il valore atteso $\mathbb{E}[K]$ non richiede l'ipotesi di indipendenza (b)

Quantificazione dei rischi e dei relativi impatti ... (cont.)

Per il beneficio totale, X , si ha:

$$\mathbb{P}[X = k C] = \mathbb{P}[K = k] = \pi_k; \quad k = 0, 1, \dots, n$$

e quindi:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= C \mathbb{E}[K] = C n p \\ \text{Var}[X] &= C^2 \text{Var}[K] = C^2 n p (1 - p) \\ \sigma[X] &= C \sqrt{n p (1 - p)}\end{aligned}$$

In particolare:

$$\mathbb{P}[X = 0] = \mathbb{P}[K = 0] = (1 - p)^n$$

decrece al crescere di n

Misura relativa di rischio: coefficiente di variazione

$$\text{CV}[X] = \frac{\sigma[X]}{\mathbb{E}[X]}$$

Quantificazione dei rischi e dei relativi impatti ... (cont.)

Esempio

$C = 1\,000$, $p = 0.005$; ipotesi di indipendenza tra infortuni

| | $n = 10$ | $n = 100$ | $n = 1\,000$ |
|---|-----------------------------------|------------------------------------|---------------------------------------|
| $\mathbb{E}[K]$ | 0.05 | 0.5 | 5 |
| $\text{Var}[K]$ | 0.04975 | 0.4975 | 4.975 |
| $\sigma[K]$ | 0.22305 | 0.70534 | 2.23047 |
| $\mathbb{E}[X]$ | 50 | 500 | 5\,000 |
| $\text{Var}[X]$ | 49\,750 | 497\,500 | 4\,975\,000 |
| $\sigma[X]$ | 223.047 | 705.34 | 2\,230.47 |
| $\text{CV}[X]$ | 4.4609 | 1.41068 | 0.44609 |
| $\mathbb{P}[X = 0] = \mathbb{P}[K = 0]$ | $0.995^{10} = 0.9511$ | $0.995^{100} = 0.6058$ | $0.995^{1\,000} = 0.0067$ |
| $\mathbb{P}[X > 0] = \mathbb{P}[K > 0]$ | $1 - 0.9511 = 0.0489$ | $1 - 0.6058 = 0.3942$ | $1 - 0.0067 = 0.9933$ |
| $\mathbb{E}[X X > 0]$ | $50 \frac{1}{0.0489} = 1\,022.71$ | $500 \frac{1}{0.3942} = 1\,268.30$ | $5\,000 \frac{1}{0.9933} = 5\,033.49$ |

Benefici di invalidità permanente (periodo 1 anno)

Quantificazione dei rischi e dei relativi impatti ... (cont.)

Osservazioni

- Se n è “piccolo” ($n = 10$ o $n = 100$) \Rightarrow il valore atteso $\mathbb{E}[K]$ non corrisponde ad alcuna determinazione possibile di K ; interpretazione “pratica”: in media, un sinistro ogni $\frac{1}{\mathbb{E}[K]}$ anni (cioè, ogni 20 anni o ogni 2 anni, rispettivamente)
- Valori attesi e varianze di K e di X crescono linearmente al crescere di n , mentre lo sqm cresce proporzionalmente a \sqrt{n} \Rightarrow rischiosità relativa del pagamento totale X , espressa da $\mathbb{C}\mathbb{V}[X]$, decresce al crescere di n ; nelle ipotesi dell’esempio:

$$\mathbb{C}\mathbb{V}[X] = \sqrt{\frac{1-p}{np}}$$

- Probabilità di 0 sinistri molto elevata per n piccolo, ma molto bassa per grandi valori di n (\Rightarrow conseguente variazione di $\mathbb{E}[X | X > 0]$)

Quantificazione dei rischi e dei relativi impatti ... (cont.)

- Si consideri il caso di importi individuali $C^{(j)}$; in particolare, tre livelli di importo:

$$C' = 500, \quad C'' = 1\,000, \quad C''' = 1\,500$$

Allora:

| Beneficio totale X | Importi individuali | Numero di infortuni |
|----------------------|-----------------------------|-------------------------|
| $X = 0$ | | $\Leftrightarrow K = 0$ |
| $X = 500$ | $\Leftrightarrow 500$ | $\Leftrightarrow K = 1$ |
| $X = 1\,000$ | $\Leftrightarrow 1\,000$ | $\Leftrightarrow K = 1$ |
| | oppure $500 + 500$ | $\Leftrightarrow K = 2$ |
| $X = 1\,500$ | $\Leftrightarrow 1\,500$ | $\Leftrightarrow K = 1$ |
| | oppure $1\,000 + 500$ | $\Leftrightarrow K = 2$ |
| | oppure $500 + 500 + 500$ | $\Leftrightarrow K = 3$ |
| ... | ... | ... |

\Rightarrow Calcolo della distribuzione di prob. di X molto più complesso

Quantificazione dei rischi e dei relativi impatti ... (cont.)

Riferimento al **Caso 3d** e al **Caso 3e**

Si assuma la stessa distribuzione di probabilità per tutte le v.a., X_1, X_2, \dots, X_N , che descrivono i danni. Come per il Caso 3a, la distribuzione può essere di tipo discreto o di tipo continuo

Si assuma una distribuzione discreta, e siano x_1, x_2, \dots, x_m le determinazioni possibili di ogni v.a. $X_k, k = 1, 2, \dots, N$

Allora la distribuzione di probabilità comune (cioè la stessa distribuzione per $k = 1, 2, \dots, N$) è specificata assegnando le probabilità (vedi Tabella seguente)

$$f_h = \mathbb{P}[X_k = x_h]; \quad h = 1, 2, \dots, m$$

Per $k = 1, 2, \dots, N$, valore atteso:

$$\bar{x} = \mathbb{E}[X_k] = \sum_{h=1}^m x_h f_h$$

Quantificazione dei rischi e dei relativi impatti ... (cont.)

e varianza:

$$\sigma^2 = \text{Var}[X_k] = \sum_{h=1}^m (x_h - \bar{x})^2 f_h$$

| | x_1 | x_2 | ... | x_h | ... | x_m | $\mathbb{E}[X_k]$ | $\text{Var}[X_k]$ |
|-------|-------|-------|-----|-------|-----|-------|-------------------|-------------------|
| X_1 | f_1 | f_2 | ... | f_h | ... | f_m | \bar{x} | σ^2 |
| X_2 | f_1 | f_2 | ... | f_h | ... | f_m | \bar{x} | σ^2 |
| X_3 | f_1 | f_2 | ... | f_h | ... | f_m | \bar{x} | σ^2 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

Distribuzioni di probabilità di X_1, X_2, \dots

Quantificazione dei rischi e dei relativi impatti ... (cont.)

Al numero aleatorio N , va assegnata ovviamente una distribuzione discreta

In particolare:

- ▷ una distribuzione finita richiede la scelta di una (ragionevole) determinazione massima n_{\max}
- ▷ in alternativa, si può adottare ad esempio la *distribuzione di Poisson*

Nell'approccio finito, devono essere assegnate le seguenti probabilità

$$\pi_h = \mathbb{P}[N = h]; \quad h = 0, 1, \dots, n_{\max}$$

Valore atteso, \bar{n} , e varianza dati da:

$$\bar{n} = \mathbb{E}[N] = \sum_{h=0}^{n_{\max}} h \pi_h$$
$$\text{Var}[N] = \sum_{h=0}^{n_{\max}} (h - \bar{n})^2 \pi_h$$

Quantificazione dei rischi e dei relativi impatti ... (cont.)

La distribuzione di probabilità del danno totale X

$$X = \begin{cases} 0 & \text{se } N = 0 \\ X_1 + \dots + X_N & \text{se } N > 0 \end{cases}$$

ed i relativi valori sintetici sono di notevole interesse, in quanto X rappresenta il costo aleatorio dei sinistri nel periodo fissato (ad es., 1 anno)

Si ricorda che, sotto specifiche ipotesi, il valore atteso del danno totale, $\mathbb{E}[X]$, può essere espresso dalla

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[N] \mathbb{E}[X_1] = \bar{n} \bar{x}$$

Quantificazione dei rischi e dei relativi impatti ... (cont.)

Esempio

Una fabbrica può essere danneggiata da incendi, eventualmente più volte nell'anno. Per X_k , $k = 1, 2, \dots$, si assuma $m = 5$ e le determinazioni possibili:

$$x_1 = 100; x_2 = 200; x_3 = 300; x_4 = 400; x_5 = 500$$

con probabilità

$$f_1 = 0.2; f_2 = 0.4; f_3 = 0.2; f_4 = 0.1; f_5 = 0.1$$

Si trova, per $k = 1, 2, \dots$: $\bar{x} = \mathbb{E}[X_k] = 250$

Per la v.a. N , si assuma $n_{\max} = 4$, e le probabilità:

$$\pi_0 = 0.9934; \pi_1 = 0.0040; \pi_2 = 0.0020; \pi_3 = 0.0004; \pi_4 = 0.0002$$

Si trova: $\bar{n} = \mathbb{E}[N] = 0.01$, e (sotto le appropriate ipotesi):

$$\mathbb{E}[X] = \bar{n} \bar{x} = 2.5$$

IL FATTORE “TEMPO” NELLE VALUTAZIONI

Nei rischi originati dall'aleatorietà della durata di vita, il tempo ha un ruolo importante (vedi, per esempio, la necessità di risorse al pensionamento, cioè Caso 4a)

Riferimento al **Caso 3c**. Sia p la probabilità che un dipendente sia infortunato durante un anno; si assuma che tale probabilità sia costante su tutto il periodo di m anni

Nelle ipotesi assunte per il Caso 3b, la distribuzione di probabilità di K_t , per $t = 1, 2, \dots, m$, è Bin(n, p):

$$\pi_k = \mathbb{P}[K_t = k] = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}; \quad k = 0, 1, \dots, n$$

e quindi:

$$\mathbb{E}[K_t] = n p$$

$$\text{Var}[K_t] = n p (1 - p)$$

Quantificazione dei rischi e dei relativi impatti ... (cont.)

Essendo

$$X_t = C K_t$$

si ha

$$\mathbb{E}[X_t] = C n p$$

Si assuma che il datore di lavoro decida di finanziare il suo impegno pluriennale, relativo al gruppo di dipendenti, allocando all'inizio del periodo di m anni (tempo 0) un ammontare di attivi pari al valore atteso dei benefici di invalidità (\Rightarrow ritenzione del rischio, o auto-assicurazione)

Si assuma che gli attivi producano interessi, al tasso annuo costante i

Sia A_t l'ammontare di attivi, allocati al tempo 0, per finanziare i benefici da pagare al tempo t . Allora:

$$A_t (1 + i)^t = \mathbb{E}[X_t]$$

cioè

$$A_t = C n p (1 + i)^{-t}$$

Quantificazione dei rischi e dei relativi impatti ... (cont.)

Ammontare totale di attivi da allocare al tempo 0:

$$A = \sum_{t=1}^m A_t = C n p \sum_{t=1}^m (1+i)^{-t}$$

Interpretazione alternativa della quantità A . Si definisca l'importo aleatorio Y :

$$Y = \sum_{t=1}^m X_t (1+i)^{-t}$$

Y è il *valore attuale aleatorio* dei benefici. Si calcoli il *valore attuale atteso* (o *valore attuariale*) dei benefici:

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{t=1}^m \mathbb{E}[X_t] (1+i)^{-t} = C n p \sum_{t=1}^m (1+i)^{-t}$$

Risulta quindi $A = \mathbb{E}[Y] \Rightarrow$ l'ammontare di attivi da allocare al tempo 0 è pari al valore attuariale dei benefici

Quantificazione dei rischi e dei relativi impatti ... (cont.)

Esempio

Siano $n = 1\,000$, $m = 5$, $C = 1\,000$, $p = 0.005$

| Anno t | $\mathbb{E}[X_t]$ | Allocazione A_t | |
|----------|-------------------|-------------------|------------|
| | | $i = 0.02$ | $i = 0.04$ |
| 1 | 5 000 | 4 901.96 | 4 807.69 |
| 2 | 5 000 | 4 805.84 | 4 622.78 |
| 3 | 5 000 | 4 711.61 | 4 444.98 |
| 4 | 5 000 | 4 619.23 | 4 274.02 |
| 5 | 5 000 | 4 528.65 | 4 109.64 |
| totale | | 23 567.29 | 22 259.11 |

Benefici di invalidità permanente (periodo $m = 5$ anni)

CONFRONTO TRA RENDIMENTI ALEATORI

Riferimento al **Caso 1b**. Si noti che:

- l'investimento con rendimento X_4 può essere trascurato perché *dominato* dall'investimento con rendimento X_1
- quindi la scelta può essere ristretta ai primi tre investimenti

Si assuma, per semplicità: $\mathbb{P}[\mathcal{E}_1] = \mathbb{P}[\mathcal{E}_2] = \mathbb{P}[\mathcal{E}_3] = \frac{1}{3}$

| | \mathcal{E}_1 | \mathcal{E}_2 | \mathcal{E}_3 | $\mathbb{E}[X_k]$ | $\text{Var}[X_k]$ |
|-------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------------|-------------------|
| X_1 | 5.0 | 6.0 | 7.0 | 6.0 | 0.667 |
| X_2 | 0.0 | 6.0 | 12.0 | 6.0 | 24.000 |
| X_3 | 5.2 | 6.1 | 6.1 | 5.8 | 0.180 |
| X_4 | 5.0 | 6.0 | 6.5 | | |

Determinazioni possibili, valore atteso e varianza dei rendimenti aleatori

Quantificazione dei rischi e dei relativi impatti ... (cont.)

Si noti che:

- (a) gli investimenti 1 e 2 sono *equivalenti* in termini di valore atteso
- (b) l'investimento 1 è meno rischioso dell'investimento 2, in quanto il primo ha minore varianza
- (c) da (a) e (b), segue che l'investimento 2 è *dominato in media-varianza* dall'investimento 1 (anche se non dominato in termini di elementi della matrice di payoff)
- (d) investimento 3 meno profittevole dell'investimento 1 in valore atteso, ma meno rischioso; quindi un investitore potrebbe preferire l'investimento 3 all'investimento 1, e quindi “pagare” la minore rischiosità accettando un minore rendimento atteso

Conclusioni:

- investimento 2 escluso da ulteriori analisi
- investimenti 1 e 3 entrambi candidati, la preferenza dipendendo dalla *avversione al rischio*

Quantificazione dei rischi e dei relativi impatti ... (cont.)

In generale, l'insieme delle “soluzioni”, tolte quelle dominate, può essere ripartito nei due sottoinsiemi:

- insieme delle soluzioni *dominate in media-varianza*
- insieme delle soluzioni *efficienti in media-varianza*

Vedi figura

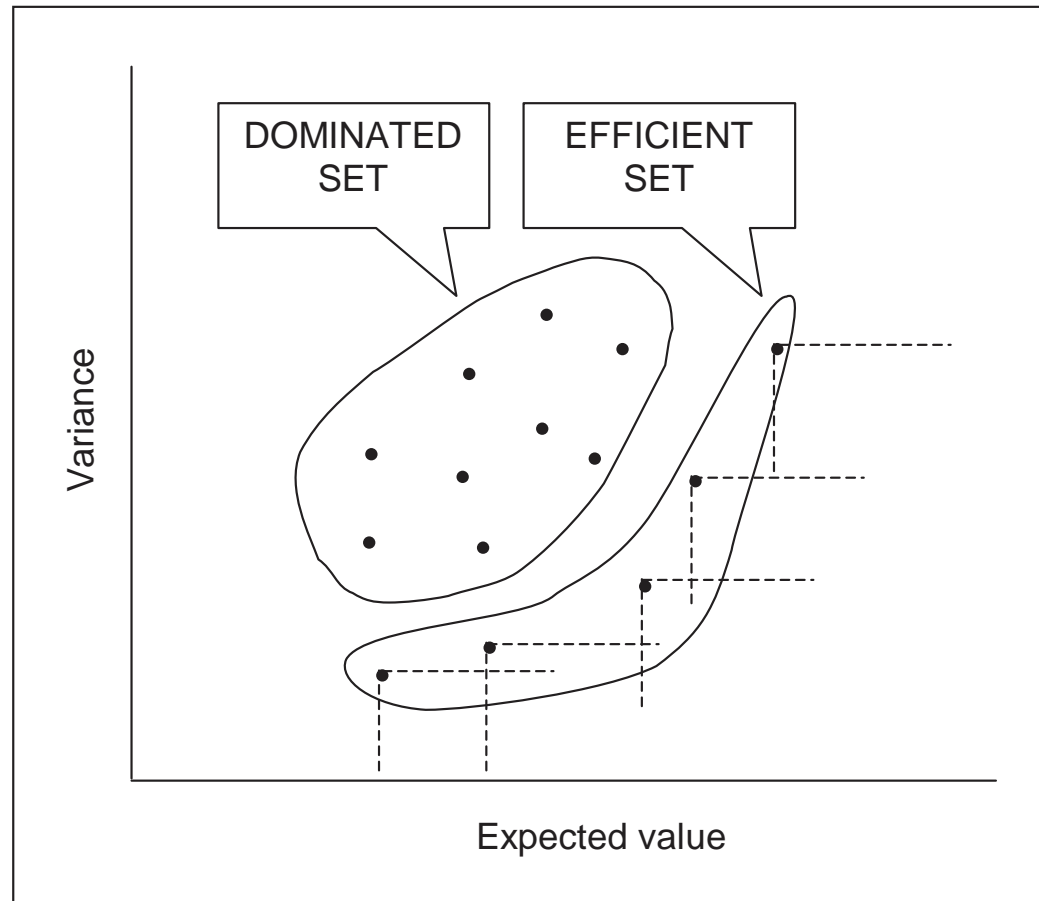
Nota: “media” = valore atteso

Approccio media-varianza \Rightarrow scelta ristretta alle soluzioni efficienti

La scelta di una specifica soluzione dipende dall'avversione al rischio

Importante contributo all'approccio media-varianza: modello di Markowitz per la scelta di investimenti

Quantificazione dei rischi e dei relativi impatti ... (cont.)



Soluzioni dominate e soluzioni efficienti nell'approccio media-varianza

Quantificazione dei rischi e dei relativi impatti ... (cont.)

Valore atteso e varianza possono essere riassunti da un'appropriata funzione, che associa un numero reale a ciascun investimento k . Il valore della funzione deve

- crescere al crescere del valore atteso
- decrescere al crescere della varianza

Esempio:

$$Q[X_k] = \mathbb{E}[X_k] - \alpha \text{Var}[X_k]$$

Il parametro α ($\alpha \geq 0$) quantifica l'avversione al rischio

- $\alpha = 0 \Rightarrow$ avversione al rischio nulla \Rightarrow la scelta si basa sui soli valori attesi
- maggiore $\alpha \Rightarrow$ maggiore importanza attribuita alla rischiosità

Altra funzione:

$$Q[X_k] = \mathbb{E}[X_k] - \beta \sigma[X_k]$$

dove $\sigma[X_k] = \sqrt{\text{Var}[X_k]}$, e β esprime l'avversione al rischio

Quantificazione dei rischi e dei relativi impatti ... (cont.)

Riferimento al precedente esempio

| | $Q[X_k] = \mathbb{E}[X_k] - \alpha \text{Var}[X_k]$ | | | |
|----------|---|-------|-------|-------|
| α | 0 | 0.01 | 0.1 | 1 |
| X_1 | 6.000 | 5.993 | 5.933 | 5.333 |
| X_3 | 5.800 | 5.798 | 5.782 | 5.620 |

Sintesi di valore atteso e varianza delle soluzioni efficienti

Per valori (relativamente) alti del parametro, ad es. per $\alpha = 1$ (elevata avversione al rischio), l'investimento 3 è preferito all'investimento 1, nonostante il minore valore atteso

Quantificazione dei rischi e dei relativi impatti ... (cont.)

Le funzioni Q , sopra definite, possono essere applicate a vari tipi di risultati (utili, rendimenti di investimenti, ecc.)

Altre funzioni sono state specificamente definite per valutare rendimenti di investimenti

Esempio: *Sharpe ratio* (chiamato anche *reward-to-variability*)

$$Q_r[X_k] = \frac{\mathbb{E}[X_k] - r}{\sigma[X_k]}$$

dove X_k denota il rendimento aleatorio dell'investimento k , e r un tasso benchmark; spesso si assume $r = r_f$, tasso risk-free

VALUTAZIONI RISK-ADJUSTED

Si consideri il seguente problema: come valutare i futuri cash flows di un'operazione finanziaria aleatoria

- tenendo conto del rischio
- adottando un criterio di valutazione basato soltanto su
 - ▷ fattori di attualizzazione
 - ▷ valori attesi

La presenza di rischi sarà considerata mediante un'appropriata scelta dei fattori di attualizzazione e degli elementi che intervengono nel calcolo del valore atteso

Varianza ed altre specifiche misure di rischio non entrano nel modello (a differenza degli esempi precedenti)

Quantificazione dei rischi e dei relativi impatti ... (cont.)

Riferimento al **Caso 1a**. Probabilità degli stati del mondo:

$$\begin{aligned}p &= \mathbb{P}[S_1] \\1 - p &= \mathbb{P}[S_2]\end{aligned}$$

chiamate *probabilità naturali* (o *realistiche*, o *fisiche*). Si assuma (per semplicità)

$$p = 1 - p = \frac{1}{2}$$

Valore atteso del payoff del risk-free bond:

$$\mathbb{E}_p[X_B] = 100$$

Valore atteso del payoff del risky bond:

$$\mathbb{E}_p[X_A] = 50p + 150(1 - p) = 100$$

(l'indice p segnala l'uso delle probabilità naturali)

Quantificazione dei rischi e dei relativi impatti ... (cont.)

Si noti che:

- ▷ i valori attesi non considerano (ovviamente) i diversi livelli di rischio
- ▷ i prezzi dei due bond dovrebbero invece riflettere la assenza / presenza di rischio

Siano (al tempo 0):

- P_A = prezzo del risky bond
- P_B = prezzo del risk-free bond

Sia r_f il tasso risk-free, e si ponga $r_f = 0.03$

Si assuma che il prezzo del risk-free bond sia dato dal valore attuale del suo payoff:

$$P_B = 100 (1 + r_f)^{-1} = 97.09$$

Quantificazione dei rischi e dei relativi impatti ... (cont.)

Per il prezzo del risky bond, P_A , è ragionevole assumere

$$P_A < P_B$$

a causa dell'*avversione al rischio*

Sia $P_A = 95$ il prezzo osservato sul mercato finanziario

Come può essere “spiegato” formalmente tale prezzo ?

Tre approcci

1. Calcolare (usando le probabilità naturali) il valore atteso del payoff, e attualizzare tale valore usando il tasso *risk-adjusted* (o *risk rate*) ρ , $\rho > r_f$

$$P_A = \mathbb{E}_p[X_A] (1 + \rho)^{-1}$$

La quantità $\rho - r_f$ è il *premio per il rischio*

$$P_A = 95 \Rightarrow \rho = 0.05263$$

Quantificazione dei rischi e dei relativi impatti ... (cont.)

2. Calcolare il valore atteso del payoff usando probabilità *risk-adjusted* $p', 1 - p'$ (anziché le probabilità naturali):

$$\mathbb{E}_{p'}[X_A] = 50 p' + 150 (1 - p')$$

Gli addendi $50 p', 150 (1 - p')$ sono chiamati *cash flow attesi risk-adjusted*. Siccome la presenza del rischio è stata considerata tramite le probabilità *risk-adjusted*, si attualizza con il tasso *risk-free*:

$$P_A = \mathbb{E}_{p'}[X_A] (1 + r_f)^{-1}$$

Nell'esempio:

$$P_A = 95 \Rightarrow p' = 0.5215, 1 - p' = 0.4785$$

L'aggiustamento per il rischio comporta un più alto “peso” attribuito al risultato peggiore. Per il valore atteso, si ha

$$\mathbb{E}_{p'}[X_A] = 97.85$$

Quantificazione dei rischi e dei relativi impatti ... (cont.)

3. Tener conto della rischiosità “trasformando” gli importi dei cash flows del risky bond

Sia $u(X_A)$ il cash flow aleatorio trasformato, con determinazioni possibili $u(50)$, $u(150)$

In particolare, come trasformata u si prenda una *funzione di utilità*, che esprima avversione al rischio

Il valore atteso di $u(X_A)$ è chiamato *utilità attesa* di X_A , e indicato con $\mathbb{U}[X_A]$:

$$\mathbb{U}[X_A] = \mathbb{E}_p[u(X_A)] = u(50)p + u(150)(1 - p)$$

Si definisca *certo equivalente* di X_A l'importo A considerato “equivalente” in termini di utilità al risultato aleatorio, cioè tale che:

$$u(A) = u(50)p + u(150)(1 - p)$$

Quantificazione dei rischi e dei relativi impatti ... (cont.)

A causa dell'avversione al rischio (espressa dalla funzione u):

$$A < \mathbb{E}[X_A] = 50p + 150(1 - p)$$

(vedi Figura (a); il grafico è solo indicativo). Infine

$$P_A = A(1 + r_f)^{-1}$$

Per esempio, si assuma

$$u(x) = -0.000005507x^2 + 0.007493x$$

allora $A = 97.85$ e $P_A = 95$

Quantificazione dei rischi e dei relativi impatti ... (cont.)

Si noti che il risky bond paga a scadenza o 50 o 150 (anziché l'importo 100 pagato dal risk-free bond); in termini della funzione di utilità:

$$u(50) = 0.360867$$

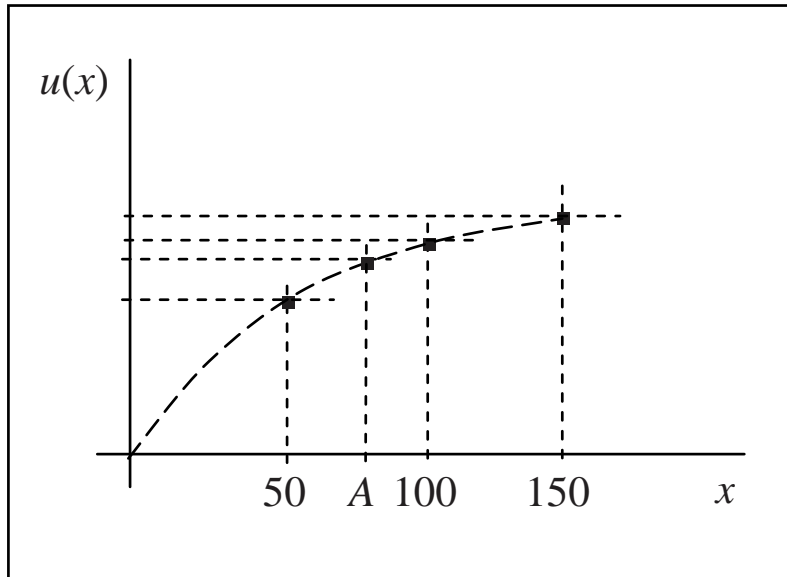
$$u(100) = 0.6942$$

$$u(150) = 1$$

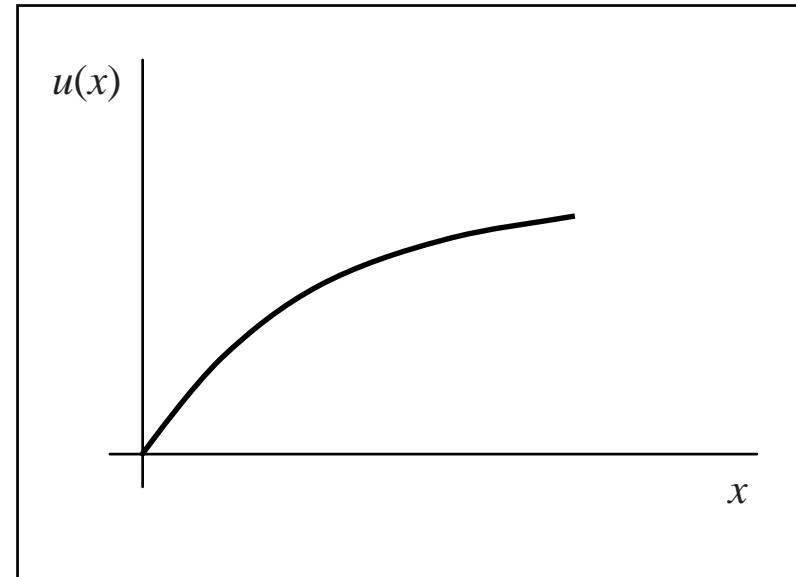
A causa dell'avversione al rischio si attribuisce alla differenza negativa $50 - 100$ un "valore" assoluto $u(50) - u(100)$ maggiore del "valore" $u(150) - u(100)$ attribuito alla differenza positiva $150 - 100$ (vedo Figura (a))

Sotto specifiche ipotesi, l'avversione al rischio può essere rappresentata da una curva concava (il grafico della funzione di utilità), che associa valori agli importi monetari (vedi Figura (b))

Quantificazione dei rischi e dei relativi impatti ... (cont.)



(a)

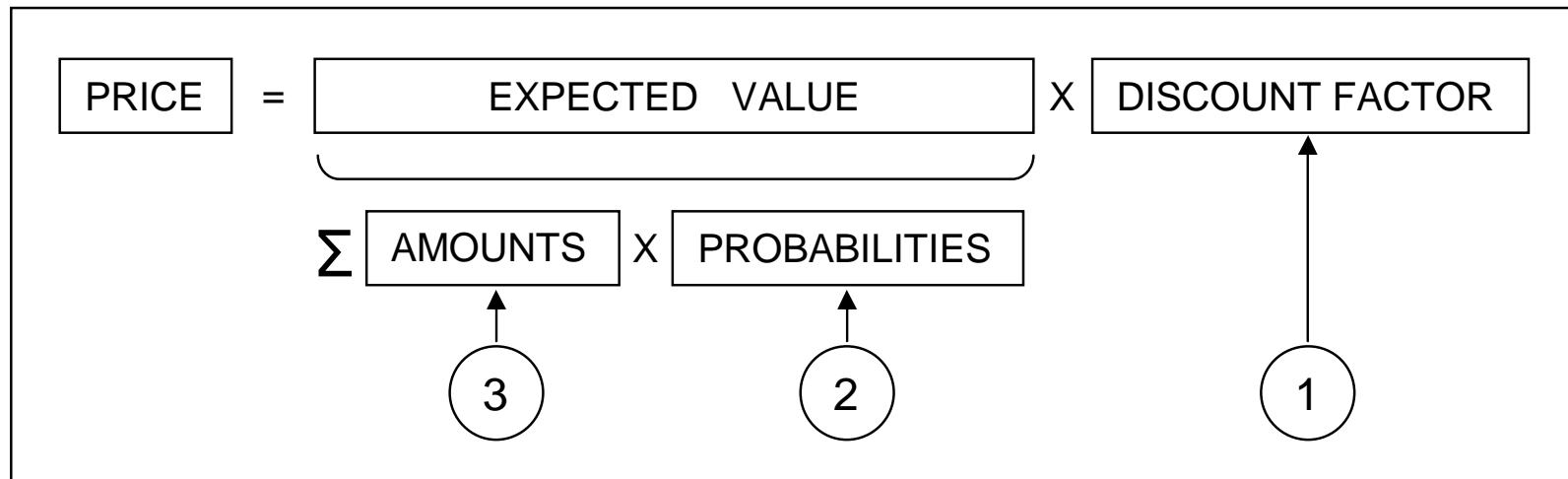


(b)

Avversione al rischio e funzione di utilità

Quantificazione dei rischi e dei relativi impatti ... (cont.)

I tre approcci:



Valutazioni risk-adjusted. Interpretazioni

1.5 MISURE DI RISCHIO

ALCUNE IDEE PRELIMINARI

Misure di rischio: valori sintetici che possono essere impiegati per esprimere la variabilità di una quantità, formalmente rappresentata da una variabile aleatoria

- Varie misure di rischio (tradizionali) appartengono al campo del calcolo delle probabilità e della statistica
- Altre misure di rischio sono state proposte più recentemente, e sono specificamente orientate a problemi di risk management e, in particolare, a strategie di allocazione di capitale

Riferimento a una v.a. Z che rappresenta un risultato prodotto da una operazione. In particolare, Z può riferirsi a un rischio speculativo; allora

$$Z < 0 \Leftrightarrow \text{perdita}$$

$$Z > 0 \Leftrightarrow \text{utile}$$

Ogni misura di rischio è un funzionale della distribuzione di prob. di Z

Per la v.a. Z , si assuma una distribuzione di probabilità (basata su esperienze statistiche, o ipotesi sulle cause di rischio sottostanti, ecc.), con funzione di ripartizione $F(z)$

Si assuma che la distribuzione di probabilità possa essere descritta in termini della funzione di densità di probabilità (brevemente: pdf) $f(z)$

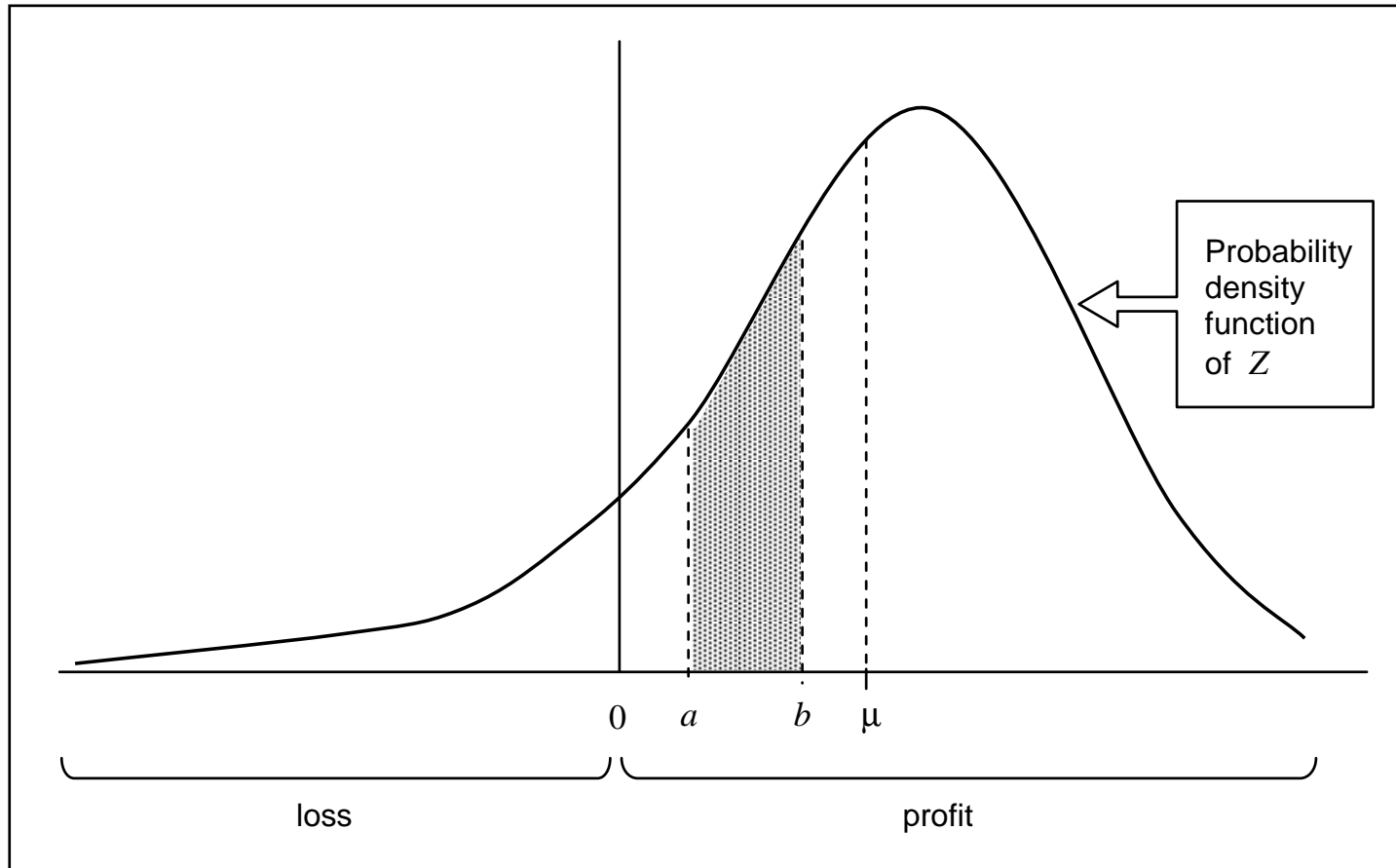
$$\mathbb{P}[a < Z \leq b] = F(b) - F(a) = \int_a^b f(z) dz$$

Valore atteso, μ :

$$\mu = \mathbb{E}[Z] = \int_{-\infty}^{+\infty} z f(z) dz$$

Se le determinazioni possibili di Z costituiscono un intervallo limitato $[z_{\min}, z_{\max}]$, l'intervallo di integrazione può essere conseguentemente modificato

Misure di rischio (cont.)



Funzione di densità del risultato aleatorio Z

MISURE DI RISCHIO TRADIZIONALI

La *varianza* è definita dalla

$$\text{Var}[Z] = \mathbb{E}[(Z - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu)^2 f(z) dz$$

Lo *scarto quadratico medio (sqm)*, $\sigma[Z]$, è la radice quadrata della varianza

$$\sigma[Z] = \sqrt{\text{Var}[Z]}$$

Si noti che

- varianza e sqm sono misure di rischio *bilaterali*, in quanto catturano sia scarti positivi che negativi dal valore atteso
 - ▷ bilateralità: non un problema nel caso di rischi puri (determinazioni possibili con segno unico)
- lo sqm è espresso nella stessa unità di misura della v.a. Z ; la varianza è invece espressa nella unità di misura “al quadrato”, e ciò può essere privo di significato

Il *rapporto varianza-su-media* è definito dalla

$$\text{VMR}[Z] = \frac{\text{Var}[Z]}{\mathbb{E}[Z]}$$

Il *coefficiente di variazione* è definito dalla

$$\text{CV}[Z] = \frac{\sigma[Z]}{\mathbb{E}[Z]}$$

Il coefficiente di variazione, soprattutto nell'ambito del risk management e dell'assicurazione, è anche chiamato *indice di rischio*

Si noti che le quantità $\text{VMR}[Z]$ e $\text{CV}[Z]$ sono misure di rischio “relative”; in particolare, $\text{CV}[Z]$ è adimensionale

Per una v.a. Z con intervallo limitato di determinazioni possibili, il *range* è definito dalla:

$$\text{Range}[Z] = z_{\max} - z_{\min}$$

MISURE DI RISCHIO “DOWNSIDE”

Misure di rischio che catturano solo la parte “peggiore” di un risultato aleatorio, e quindi *unilaterali*

Molte misure di rischio downside proposte nell’ambito dei problemi di scelta di portafoglio, come strumenti per l’analisi dei rendimenti

Ulteriori misure di rischio proposte più recentemente nell’ambito del risk management

La *semi-varianza*, che cattura solo gli scarti negativi dal valore atteso, è definita dalla:

$$\text{semiVar}[Z] = \mathbb{E}[(\min\{Z - \mu, 0\})^2] = \int_{-\infty}^{\mu} (z - \mu)^2 f(z) dz$$

Il *semi-sqm* è dato da

$$\text{semi}\sigma[Z] = \sqrt{\text{semiVar}[Z]}$$

Le *misure di shortfall* sono basate su un “target” τ . Per esempio

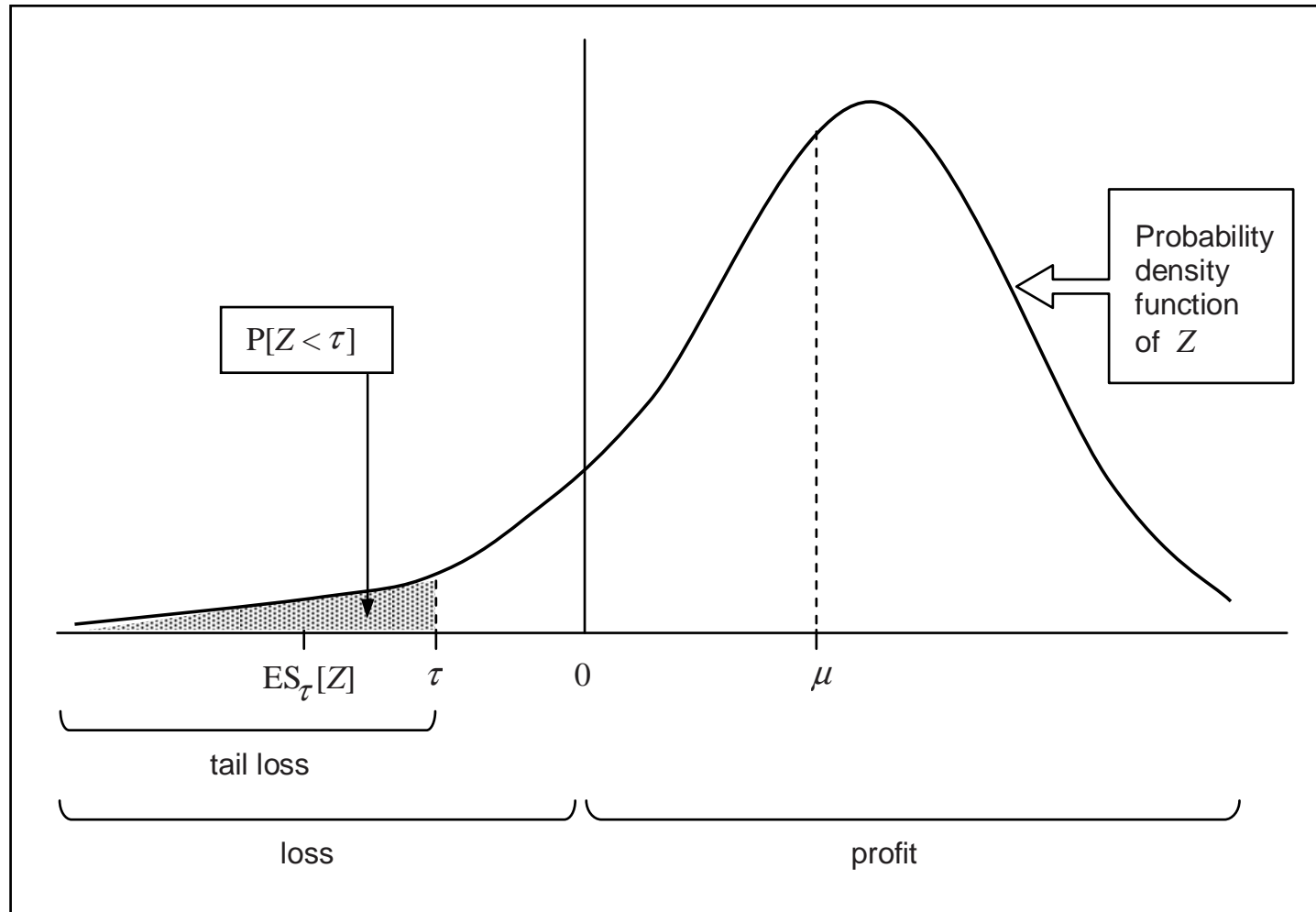
- ▷ se Z denota un risultato monetario, un valore negativo può essere scelto per il target τ ; $Z < \tau$ significa allora una perdita maggiore del target
- ▷ se Z denota un rendimento, il target può essere positivo (e piccolo), al fine di considerare i rendimenti che non raggiungono il benchmark fissato

La *probabilità di shortfall* è definita come segue:

$$\mathbb{P}[Z < \tau] = \int_{-\infty}^{\tau} f(z) dz$$

Sia Z un risultato monetario. L'*expected shortfall* è il valore atteso della perdita, subordinatamente all'eccedere il target (negativo):

$$\text{ES}_{\tau}[Z] = \mathbb{E}[Z|Z < \tau] = \frac{\int_{-\infty}^{\tau} z f(z) dz}{\mathbb{P}[Z < \tau]}$$



Misure di shortfall

MISURE DI RISCHIO E REQUISITI DI CAPITALE

Sono state proposte misure di rischio downside che possono essere interpretate come *requisiti di capitale* aventi lo scopo di “proteggere” un’operazione finanziaria con risultato aleatorio Z

L’agente (ad es. un intermediario finanziario) deve allocare capitale che può essere usato per coprire (almeno in parte) la possibile perdita, sicché la perdita stessa non danneggia altre linee di business

Il *Value at Risk* (brevemente VaR) è l’importo (negativo) VaR_α tale che

$$\mathbb{P}[Z \leq VaR_\alpha] = \alpha$$

dove

- α è una fissata (piccola) probabilità, per es. $\alpha = 0.01$
- la probabilità $1 - \alpha$ è detta *livello di confidenza*

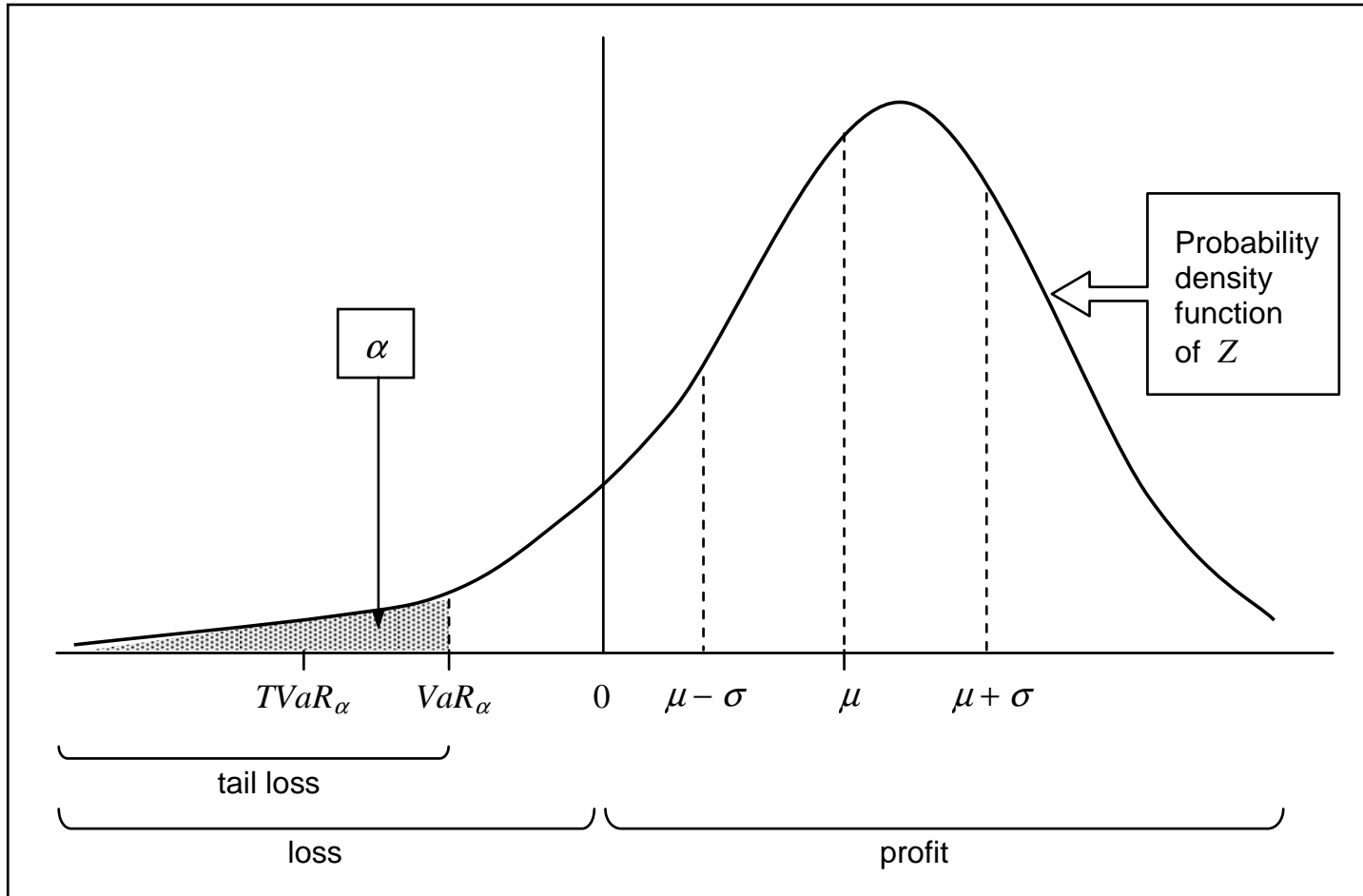
Indicata con F la funzione di ripartizione della v.a. Z , risulta (assumendo F invertibile):

$$VaR_\alpha = F^{-1}(\alpha)$$

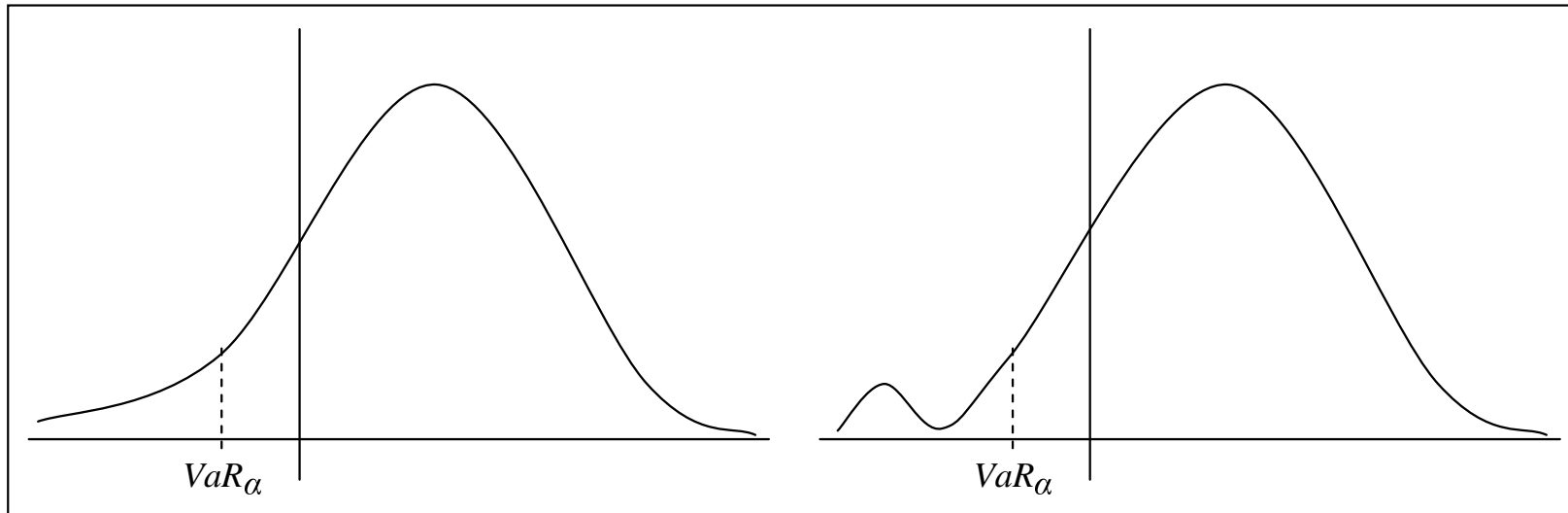
Osservazioni

- La quantità VaR_α è l' α -percentile della distribuzione di probabilità della v.a. Z . Nota: VaR non ha alcun significato se non è specificata la probabilità
- VaR_α può essere interpretato come la massima perdita subita se non si verifica un evento “estremo” (o “tail event”). La definizione di “estremo” dipende dalla probabilità scelta
- Se si alloca il capitale $-VaR_\alpha$, una qualunque perdita non estrema può essere completamente coperta
- La quantità VaR_α non fornisce, da sola, alcuna informazione sulla possibile perdita se si verifica un evento estremo

Misure di rischio (cont.)



Value at Risk e Tail Value at Risk



Distribuzioni con uguale VaR ma con diverso valore atteso condizionato al verificarsi di un evento estremo

Si esprima VaR_α in termini del valore atteso μ e dello sqm σ della distribuzione di probabilità della v.a. Z

Sia γ_α il coefficiente tale che

$$\mathbb{P}[Z \leq \mu - \gamma_\alpha \sigma] = \alpha$$

Allora

$$VaR_\alpha = \mu - \gamma_\alpha \sigma$$

Dato α , il coefficiente γ_α può essere facilmente determinato se si assume per Z la *distribuzione normale* $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$

| α | γ_α |
|----------|-----------------|
| 0.100 | 1.282 |
| 0.050 | 1.645 |
| 0.025 | 1.960 |
| 0.001 | 3.090 |

Coefficiente γ_α (Distribuzione normale)

Il *Tail Value at Risk* (brevemente TailVaR, o TVaR, detto anche *Conditional Tail Expectation*) è l'importo (negativo) $TVaR_\alpha$ definito come segue:

$$TVaR_\alpha = \mathbb{E}[Z | Z < VaR_\alpha] = \frac{\int_{-\infty}^{VaR_\alpha} z f(z) dz}{\mathbb{P}[Z < VaR_\alpha]} = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{VaR_\alpha} z f(z) dz \quad (*)$$

$TVaR_\alpha$ è l'expected shortfall relativo al target VaR_α , cioè

$$TVaR_\alpha = \text{ES}_{VaR_\alpha}[Z]$$

Se si alloca l'importo $-TVaR_\alpha$, anche una perdita causata da un evento estremo può essere, almeno parzialmente, coperta. Per ogni distribuzione di probabilità, si ha

$$-TVaR_\alpha > -VaR_\alpha$$

Espressione alternativa per il TVaR:

$$TVaR_\alpha = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha VaR_p \, dp \quad (**)$$

Quindi: $TVaR_\alpha =$ media integrale di VaR_p per $0 \leq p \leq \alpha$

Dalla (**), posto

$$z = F^{-1}(p) \quad \text{e quindi} \quad p = F(z)$$

si trova per sostituzione la (*)

Per ogni data distribuzione di probabilità della v.a. Z , si può trovare α' tale che:

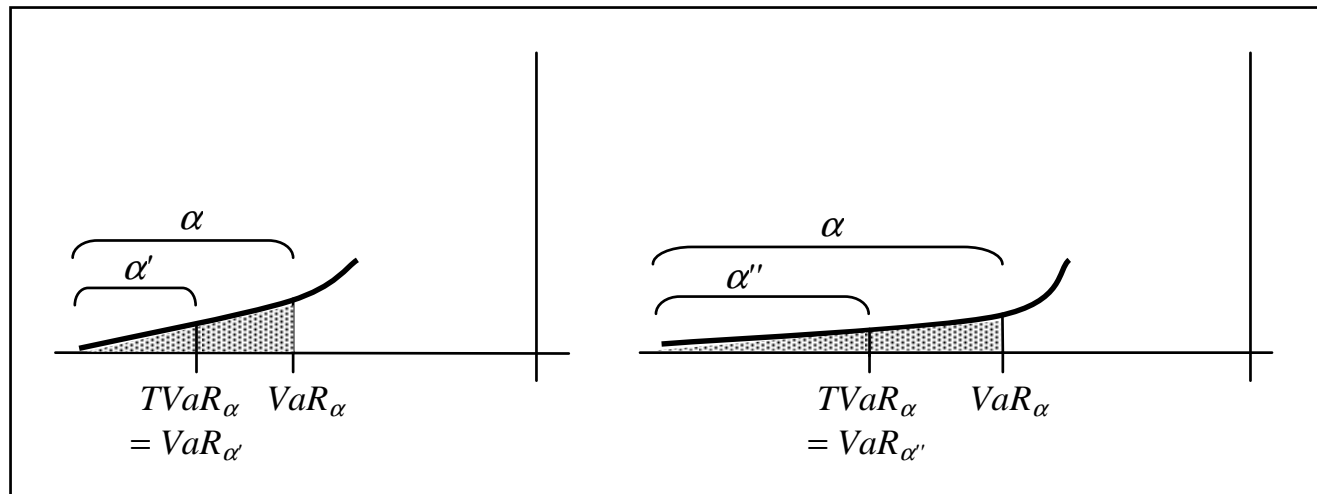
$$TVaR_{\alpha} = VaR_{\alpha'}$$

Relazione utile quando è disponibile una procedura per il calcolo del VaR (ma non una per il calcolo del TailVaR)

Ovviamente, $\alpha' < \alpha$; il legame α tra α' dipende dalla distribuzione di probabilità di Z

Passando ad altre distribuzioni, si trova

$$TVaR_{\alpha} \approx VaR_{\alpha'}$$



Relazione tra VaR e TailVaR

Osservazione

Proprietà delle misure di rischio

Una misura di rischio $R[Z]$ è detta *coerente* se soddisfa un insieme di proprietà. Consideriamo solo la proprietà di *subadditività* definita dalla:

$$R[Z_1 + Z_2] \leq R[Z_1] + R[Z_2]$$

con Z_1, Z_2 risultati aleatori di due operazioni. A parole: il rischio complessivo generato dalle due operazioni combinate non può essere peggiore della somma dei rischi delle due operazioni effettuate separatamente, ovvero il merging delle operazioni non origina extrarischio. Su questa proprietà è basato il principio di *diversificazione*. In particolare, adottando una misura subadditiva:

- un investitore è incentivato a fare merging delle due operazioni
- se la misura di rischio è interpretata come capitale da allocare, il merging non richiede extra capitale

Si dimostra che il VaR non è subadditivo e quindi non è una misura coerente di rischio, mentre lo è il TailVaR

1.6 TRASFERIMENTO DI RISCHI

COSTRUZIONE DI UN POOL DI RISCHI

Si assuma che:

- n individui sono soggetti allo stesso tipo di rischio
- per il generico individuo j , il rischio comporta la perdita $x^{(j)}$ (danno, responsabilità civile, ecc.) se si verifica l'evento $\mathcal{E}^{(j)}$ (rischio "base" descritto come **Caso 2**). Perdita aleatoria, $X^{(j)}$, per $j = 1, 2, \dots, n$, definita come segue:

$$X^{(j)} = \begin{cases} x^{(j)} & \text{se } \mathcal{E}^{(j)} \\ 0 & \text{se } \bar{\mathcal{E}}^{(j)} \end{cases}$$

- le perdite individuali $X^{(j)}$ sono indipendenti
- $p^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, n$, è la probabilità di soffrire la perdita

$$p^{(j)} = \mathbb{P}[\mathcal{E}^{(j)}] = \mathbb{P}[X^{(j)} = x^{(j)}]$$

Trasferimento di rischi (cont.)

- ciascun individuo è avverso al rischio, e cerca protezione finanziaria contro la perdita potenziale
- a tale scopo, gli n individui decidono di costituire un *pool*, che sarà finanziato da *contributi* individuali, e quindi pagherà benefici agli individui (membri del pool) che avranno sofferto perdita
- ciascun beneficio individuale sarà uguale alla perdita \Rightarrow il membro j riceverà l'importo $x^{(j)}$ se soffrirà la perdita, 0 altrimenti

Consideriamo alcuni aspetti della costituzione del pool

Ammontare totale aleatorio $X^{[P]}$, pagato dal pool ai suoi membri, definito come segue:

$$X^{[P]} = \sum_{j=1}^n X^{(j)}$$

Valore atteso:

$$\mathbb{E}[X^{[P]}] = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[X^{(j)}] = \sum_{j=1}^n x^{(j)} p^{(j)}$$

Varianza (per l'ipotesi di indipendenza):

$$\mathbb{V}\text{ar}[X^{[P]}] = \sum_{j=1}^n \mathbb{V}\text{ar}[X^{(j)}] = \sum_{j=1}^n (x^{(j)})^2 p^{(j)} (1 - p^{(j)})$$

Scarto quadratico medio (sqm, o deviazione standard):

$$\sigma[X^{[P]}] = \sqrt{\mathbb{V}\text{ar}[X^{[P]}]}$$

Minima determinazione possibile di $X^{[P]}$: 0

Massima determinazione possibile di $X^{[P]}$: $\sum_{j=1}^n x^{(j)}$

Insieme delle determinazioni possibili di $X^{[P]}$ e relativa distribuzione di probabilità dipendono dagli importi $x^{(j)}$

Per semplicità, si consideri un pool “omogeneo” in termini sia di importi sia di probabilità di perdita, cioè, per $j = 1, 2, \dots, n$:

$$x^{(j)} = x$$

$$p^{(j)} = p$$

Segue che, per $j = 1, 2, \dots, n$:

$$\mathbb{E}[X^{(j)}] = x p$$

$$\text{Var}[X^{(j)}] = x^2 p (1 - p)$$

$$\sigma[X^{(j)}] = x \sqrt{p (1 - p)}$$

Determinazioni possibili di $X^{[P]}$:

$$0, x, 2x, \dots, nx$$

Valore atteso, varianza e sqm di $X^{[P]}$:

$$\mathbb{E}[X^{[P]}] = n x p$$

$$\text{Var}[X^{[P]}] = n x^2 p (1 - p)$$

$$\sigma[X^{[P]}] = x \sqrt{n p (1 - p)}$$

Sia K il numero aleatorio di eventi nel pool; risulta

$$X^{[P]} = K x$$

Segue che il valore atteso di $X^{[P]}$ può essere letto in due modi:

- (a) $(n p) x = \mathbb{E}[K] x$, cioè:
numero atteso di eventi \times importo della perdita individuale
- (b) $n (x p) = n \mathbb{E}[X^{(1)}]$, cioè:
numero di individui nel pool \times perdita attesa individuale

Esempio

Si assumano i seguenti dati:

$$n = 100$$

$$p^{(j)} = p = 0.005, \text{ per } j = 1, 2, \dots, 100$$

$$x^{(j)} = x = 10\,000, \text{ per } j = 1, 2, \dots, 100$$

Si ha, per $j = 1, 2, \dots, 100$:

$$\mathbb{E}[X^{(j)}] = x p = 50$$

$$\text{Var}[X^{(j)}] = x^2 p (1 - p) = 497\,500$$

e per il pool:

$$\text{Range}[X^{[P]}] = n x - 0 = 1\,000\,000$$

$$\mathbb{E}[X^{[P]}] = n x p = 5\,000$$

$$\text{Var}[X^{[P]}] = n x^2 p (1 - p) = 49\,750\,000$$

$$\sigma[X^{[P]}] = 7\,053.37$$

$$\text{CV}[X^{[P]}] = \frac{\sigma[X^{[P]}]}{\mathbb{E}[X^{[P]}]} = 1.411$$

Effetti della costruzione di un pool di rischi

- Dall'equazione della varianza: al crescere della dimensione n del pool, aumenta la varianza del pagamento totale $X^{[P]}$, e quindi la rischiosità “assoluta”
- La rischiosità “relativa”, cioè rapportata al valore atteso, decresce al crescere della dimensione del pool. In termini del coefficiente di variazione, detto anche “indice di rischio” e denotato con ρ :

$$\rho = \text{CV}[X^{[P]}] = \frac{\sigma[X^{[P]}]}{\mathbb{E}[X^{[P]}]} = \frac{x \sqrt{np(1-p)}}{x np} = \sqrt{\frac{1-p}{np}} \quad (*)$$

In particolare, per ogni data probabilità p :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{CV}[X^{[P]}] = 0$$

- Dalla (*): per una data dimensione n , il coefficiente di variazione è tanto maggiore quanto minore è p

Esempio 1

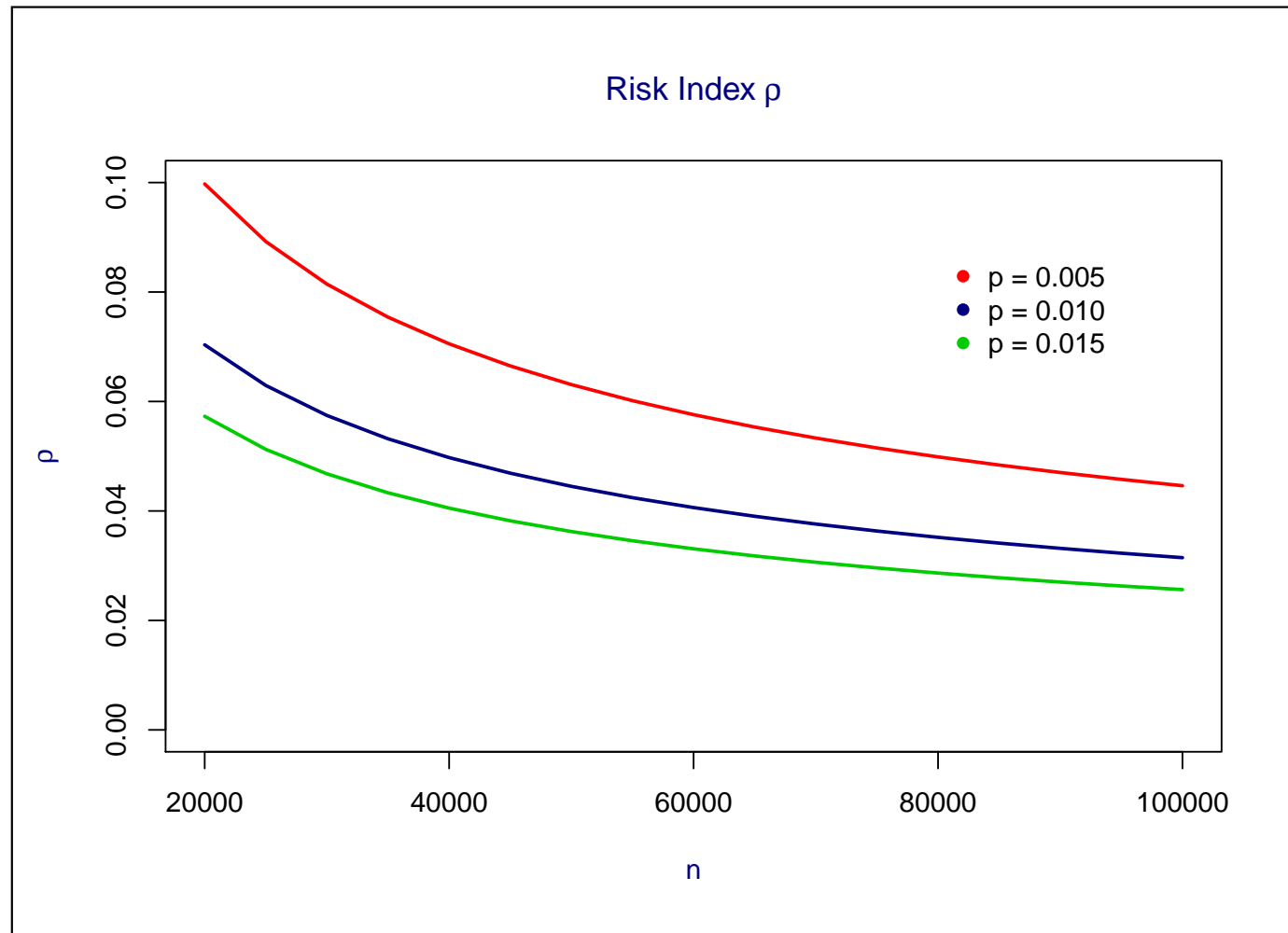
Pool di n rischi, omogeneo in termini di perdite e di probabilità, con $p = 0.005$

| n | $\rho = \text{CV}[X^{[P]}]$ |
|----------|-----------------------------|
| 10 | 4.461 |
| 100 | 1.411 |
| 1 000 | 0.446 |
| 10 000 | 0.141 |
| ... | ... |
| ∞ | 0.000 |

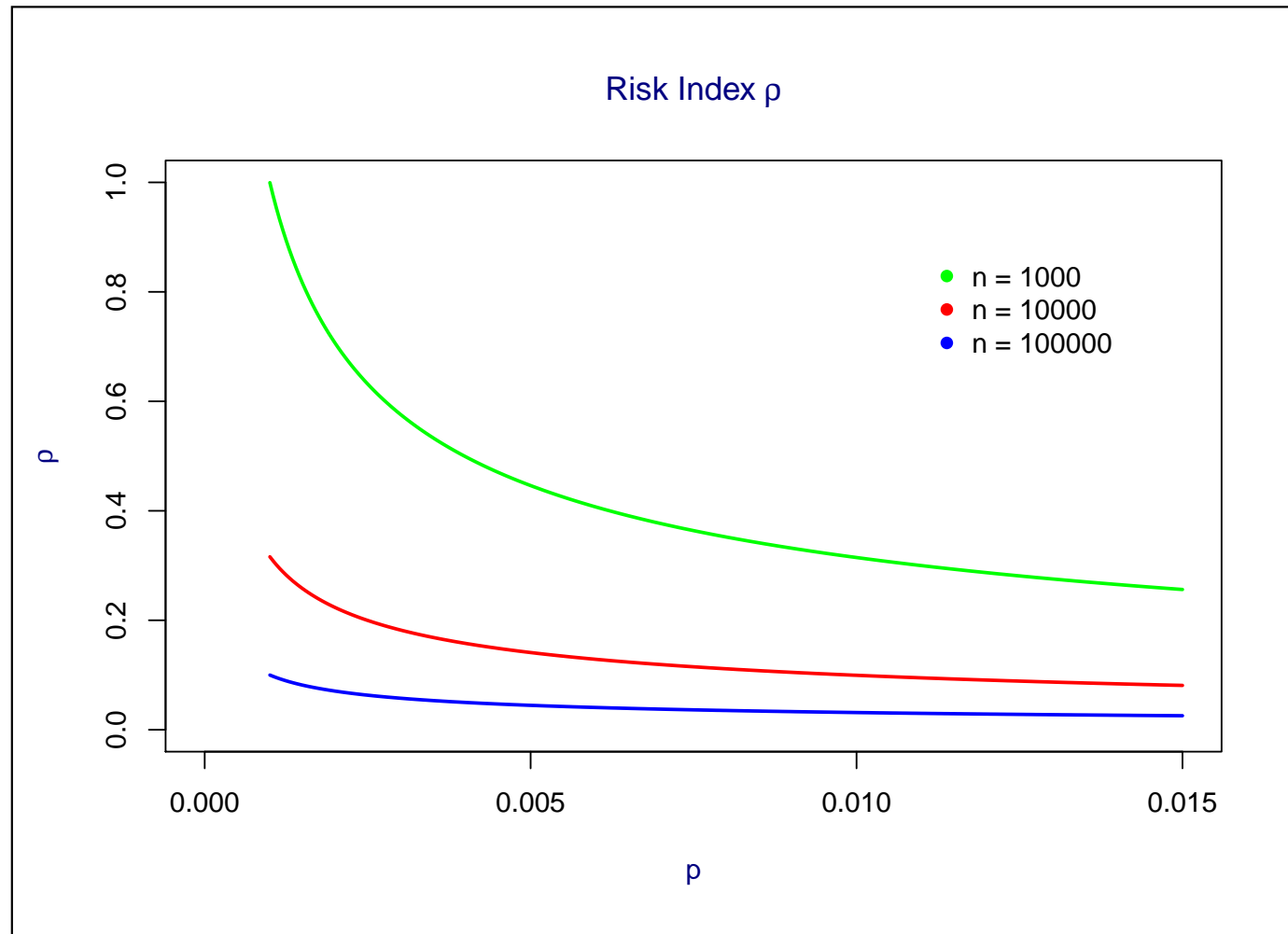
Il coefficiente di variazione

Esempio 2

Coefficiente di variazione in funzione di n e in funzione di p



Trasferimento di rischi (cont.)



Osservazione

Decrescenza della rischiosità relativa, in termini di coefficiente di variazione:
effetto pooling

Risultato dovuto a J. N. Tetens, 1785
(primo contributo alla “teoria individuale del rischio”)



Esempio 3

Misure di variabilità assolute ((a) varianza e (b) scarto quadratico medio) e relativa ((c) indice di rischio) in funzione di p ;

$$x = 1, n = 1\,000$$

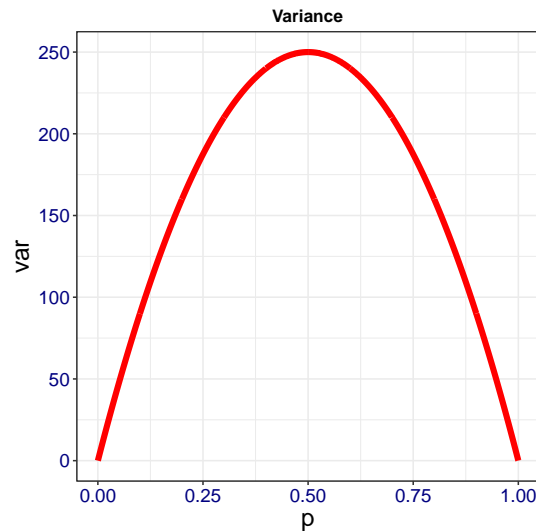
$$(a) \quad \mathbb{V}\text{ar}[X^{[P]}] = 1\,000 p (1 - p)$$

$$(b) \quad \sigma[X^{[P]}] = \sqrt{1\,000 p (1 - p)}$$

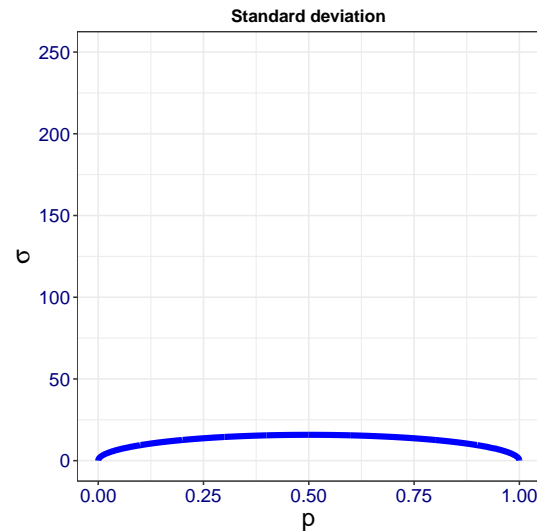
$$(c) \quad \rho = \sqrt{\frac{1 - p}{1\,000 p}}$$

Vedi Figura seguente

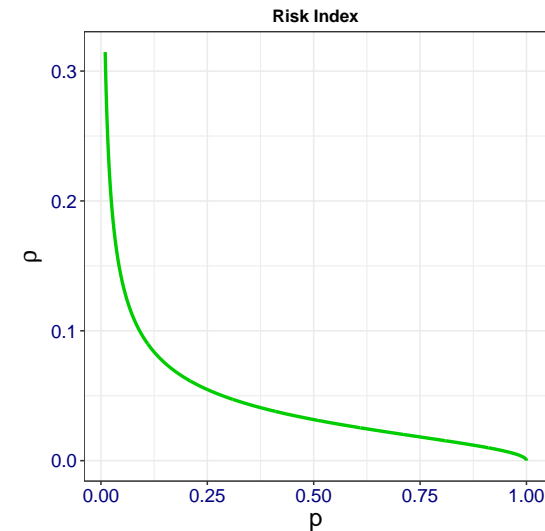
Trasferimento di rischi (cont.)



(a)



(b)



(c)

Misure di variabilità assolute e relativa

- misure assolute
 - \Rightarrow max variabilità con $p = \frac{1}{2}$
 - \Rightarrow variabilità nulla con $p = 0$ e $p = 1$
- misura relativa \Rightarrow variabilità decrescente al crescere di p , per effetto della speranza matematica al denominatore

FINANZIAMENTO DEL POOL

Riferimento al **Caso 2**

Si assuma l'omogeneità del pool in termini di

- ammontare della perdita, x
- probabilità di perdita, p

Allora:

$$X^{[P]} = \sum_{j=1}^n X^{(j)} = K x$$

Descriviamo alcuni metodi alternativi per il finanziamento del pagamento totale aleatorio $X^{[P]}$

Metodo 1

Pagamento totale ripartito in parti uguali tra i membri del pool

In base all'informazione disponibile al momento di costituzione del pool, il contributo individuale è aleatorio:

$$\frac{X^{[P]}}{n} = \frac{K x}{n}$$

con valore atteso

$$\mathbb{E} \left[\frac{X^{[P]}}{n} \right] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[X^{(j)}] = x p$$

dunque indipendente dal numero di membri del pool

La rischiosità individuale dipende dalla dimensione del pool

Si assuma la varianza come misura di rischio. Per il generico individuo j , la rischiosità “originale” (cioè prima del trasferimento al pool) è data da

$$\text{Var}[X^{(j)}] = x^2 p (1 - p)$$

mentre, per l'individuo come membro del pool, la rischiosità “finale” (originata dall'aleatorietà dei contributi individuali) è data da

$$\text{Var} \left[\frac{X^{[P]}}{n} \right] = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \text{Var}[X^{(j)}] = \frac{1}{n} x^2 p (1 - p)$$

⇒ al crescere della dimensione n del pool, la rischiosità individuale (in termini di varianza) decresce

Da un punto di vista teorico (*legge “forte” dei grandi numeri*):

$$\mathbb{P} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^n X^{(j)}}{n} = \mathbb{E}[X^{(1)}] \right] = 1$$

con $\mathbb{E}[X^{(1)}]$ valore atteso, comune a tutte le variabili aleatorie $X^{(j)}$

In base alla precedente notazione, si ha

$$\mathbb{P} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X^{[P]}}{n} = x p \right] = 1$$

⇒ nel caso di un pool “infinitamente” grande, il contributo di ciascun membro coincide, con probabilità 1, al valore atteso della perdita

Conclusioni:

1. il contributo individuale è aleatorio, con rischiosità decrescente al crescere della dimensione del pool
2. la copertura del pagamento totale è certa (ammesso che, alla fine del periodo, ogni membro paghi il contributo !)

Metodo 2

Il pagamento totale è finanziato in anticipo (alla costituzione del pool, dunque prima di conoscere l'ammontare di pagamento totale), mediante contributi individuali da determinare in base ad un *principio di calcolo*

In particolare, si assuma che:

- l'ammontare totale dei contributi, $P^{[P]}$, sia uguale al valore atteso del pagamento totale
- l'effetto di capitalizzazione (interesse) nell'anno sia trascurabile

Allora:

$$P^{[P]} = \mathbb{E}[X^{[P]}] = n x p$$

Il contributo individuale è certo, uguale al valore atteso della perdita individuale

$$\frac{P^{[P]}}{n} = x p$$

La determinazione effettiva di $X^{[P]}$ può essere maggiore del suo valore atteso, e quindi maggiore dell'ammontare totale dei contributi

⇒ considerazione dell'evento

$$X^{[P]} > P^{[P]}$$

(*insolvenza*) e della sua probabilità (aspetto critico nell'analisi del risk pooling)

In termini più generali: si indichi con $\Pi^{[P]}$ l'ammontare totale di contributi, non necessariamente uguale a $\mathbb{E}[X^{[P]}]$ ⇒ contributo individuale non necessariamente uguale a $x p$ (ma tutti i contributi di

uguale ammontare: $\frac{\Pi^{[P]}}{n}$)

Si considerino le seguenti situazioni:

- (a) $\Pi^{[P]} < \mathbb{E}[X^{[P]}]$: la probabilità di coprire il pagamento totale è minore rispetto al caso $\Pi^{[P]} = P^{[P]} = \mathbb{E}[X^{[P]}]$ (interesse pratico: vedi Metodo 3)
- (b) $\Pi^{[P]} > \mathbb{E}[X^{[P]}]$: la probabilità di coprire il pagamento totale è maggiore rispetto al caso $\Pi^{[P]} = P^{[P]} = \mathbb{E}[X^{[P]}]$: la differenza $\Pi^{[P]} - P^{[P]}$ costituisce il *caricamento di sicurezza* totale incluso nei contributi al fine di diminuire la probabilità di insolvenza

Se

$X^{[P]} < \Pi^{[P]} \Rightarrow$ il pool ottiene utile

$X^{[P]} > \Pi^{[P]} \Rightarrow$ il pool subisce perdita

In caso di utile:

- utile (parzialmente) redistribuito ai membri
- utile (parzialmente) “riservato”, per aumentare la probabilità di copertura del pagamento totale in futuri periodi

In caso di perdita:

- se ulteriori risorse (riserve) sufficienti, il pool può coprire il pagamento totale
- se ulteriori risorse non disponibili o non sufficienti, soluzione possibile data da una riduzione del beneficio pagato ai membri che subiranno perdita; se K è il numero aleatorio di membri che subiranno perdita, il beneficio individuale è dato da:

$$\hat{X}^{(j)} = \begin{cases} \min \left\{ x, \frac{\Pi^{[P]}}{K} \right\} & \text{se } \mathcal{E}^{(j)} \\ 0 & \text{se } \bar{\mathcal{E}}^{(j)} \end{cases}$$

Metodo 3

Generalizzazione dell'approccio adottato nel Metodo 2, in caso di contributi non sufficienti a coprire il pagamento totale

Ipotesi: ammontare totale dei contributi determinato mediante una formula che, per esempio, collega il contributo individuale al reddito del soggetto \Rightarrow trascurata (almeno in parte) la relazione tra contributi e ammontare (stimato) delle perdite

Metodo 3 (rispetto a Metodo 2) \Rightarrow "inversione" logica, in quanto i benefici sono determinati in funzione del totale di contributi (e del numero di perdite individuali nel pool)

Esempio

Pool di $n = 500$ rischi indipendenti, omogeneo in termini di
perdita individuale $x = 1\,000$
probabilità di perdita individuale $p = 0.01$

Risulta $\mathbb{E}[K] = np = 5$

Si considerino i seguenti casi:

- (a) numero di perdite individuali $K = 2$ ($< \mathbb{E}[K]$)
- (b) numero di perdite individuali $K = 6$ ($> \mathbb{E}[K]$)

1. Pool finanziato secondo il Metodo 1. Valore atteso e varianza di ciascun contributo individuale:

$$\mathbb{E} \left[\frac{X^{[P]}}{500} \right] = x p = 10$$

$$\text{Var} \left[\frac{X^{[P]}}{500} \right] = \frac{1}{500} x^2 p (1 - p) = 19.80$$

Varianza della perdita individuale, prima del trasferimento al pool:

$$\text{Var}[X^{(j)}] = x^2 p (1 - p) = 9\,900$$

Nei due casi:

- (a) $X^{[P]} = 2\,000 \Rightarrow$ contributo individuale = 4, minore del suo valore atteso
- (b) $X^{[P]} = 6\,000 \Rightarrow$ contributo individuale = 12, maggiore del suo valore atteso

2. Pool finanziato secondo il Metodo 2. Contributo individuale $x_p = 10$ (in assenza di caricamento di sicurezza). Nei due casi:

(a) $X^{[P]} = 2\,000 \Rightarrow$ il pool ottiene utile
 $= 5\,000 - 2\,000 = 3\,000$

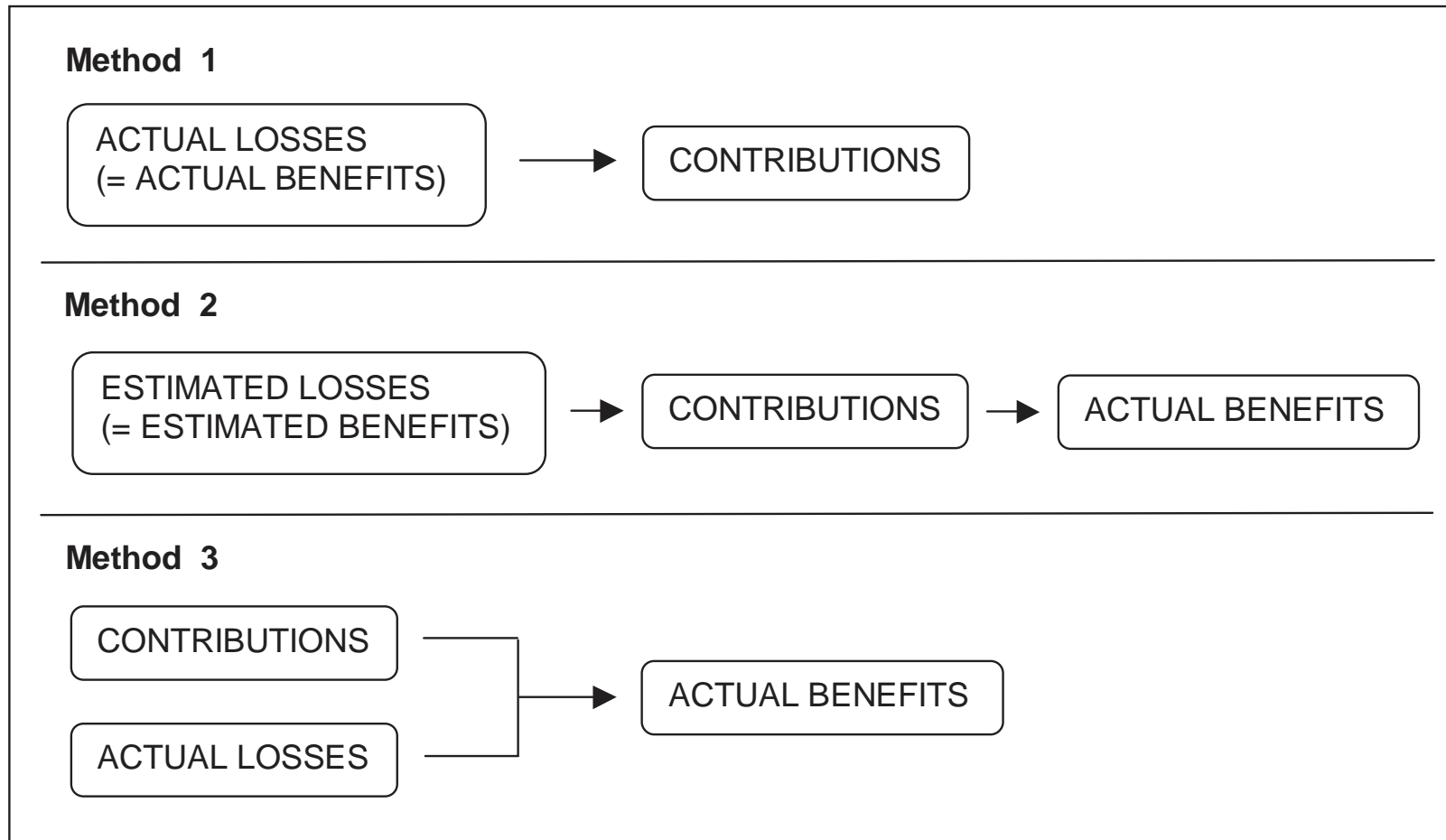
(b) $X^{[P]} = 6\,000 \Rightarrow$ il pool subisce perdita
 $= 5\,000 - 6\,000 = -1\,000$

3. Pool finanziato secondo il Metodo 3. Il contributo individuale sia $= 10$. Nei due casi:

(a) beneficio individuale $= \min \left\{ 1\,000, \frac{5\,000}{2} \right\} = 1\,000$, e il
pool ottiene utile $= 5\,000 - 2\,000 = 3\,000$

(b) beneficio individuale $= \min \left\{ 1\,000, \frac{5\,000}{6} \right\} = 833.33$

Trasferimento di rischi (cont.)



Finanziamento di un pool: relazioni tra contributi e benefici

Confronto dei metodi

- La costruzione e la gestione del pool sono basate su un mutuo accordo tra i membri del pool stesso. L'“equilibrio tecnico” tra contributi e pagamento totale è garantito solo con il Metodo 1, in quanto i contributi sono determinati ex-post
- Se i contributi sono calcolati ex-ante secondo il Metodo 2, l'equilibrio tecnico non è garantito. In particolare,
 - ▷ se $X^{[P]} > \Pi^{[P]}$
 - ▷ e il pagamento effettivo è basato su una riduzione dei benefici i benefici stessi non sono più garantiti. Da un punto di vista pratico, il Metodo 2 può essere adottato se
 - un *intermediario* interviene nel processo di pooling
 - e assume il rischio di pagare i benefici stabiliti anche se il totale dei contributi non copre il totale di perdite individuali (ruolo dell'assicurazione)

- Il Metodo 3 implica un'inversione logica nella relazione tra contributi e benefici, e non fornisce ai membri garanzia sull'ammontare dei benefici. Un'intermediazione nel processo di pooling è possibile (semplice gestione della transazione finanziaria), ma senza assunzione di rischio. L'intermediario può essere una "società di mutuo soccorso"
- In tutti i metodi, il pagamento dei benefici si basa su un trasferimento monetario dai membri che pagano i contributi ma non ricevono benefici ai membri che hanno sofferto perdite e sono quindi titolati a ricevere benefici. Tale trasferimento è detto effetto *mutualità* (particolare tipo di *cross-subsidy* nel processo di trasferimento di rischi)

IL RUOLO DELL'ASSICURATORE

Dal punto di vista degli individui che trasferiscono rischi a un pool, la “qualità” del trasferimento richiede

- contributo noto in anticipo, al momento di trasferimento del rischio
 - ammontare del beneficio in funzione della perdita subita, quali che siano nel pool
 - ▷ numero di perdite individuali
 - ▷ ammontare totale delle perdite individuali
- cioè *beneficio garantito*

Caratteristiche di trasferimento rischi realizzabili se un intermediario interviene nel processo di trasferimento e assume il rischio di pagare i benefici garantiti, anche se contributi insufficienti

Tipico intermediario: *assicuratore*, che garantisce ai membri del pool (gli *assicurati*) il pagamento dei benefici secondo le condizioni stabilite (nel *contratto assicurativo*)

Intermediazione:

- “amministrativa” (raccolta contributi, o *premi*, raccolta denunce perdite, pagamento benefici)
- “tecnica” (gestione della mutualità nel pool, cioè nel *portafoglio* di rischi assicurati, garantendo il pagamento dei benefici stabiliti, e quindi assumendo il relativo rischio)
- “finanziaria”, in caso di coperture pluriennali (gestione dei *fondi* originati dalla raccolta dei premi)
 - ▷ di particolare importanza in prodotti di assicurazione vita (ma non in tutti)

Si consideri il rischio assunto dall'assicuratore, in relazione alla gestione del pool

Siano

- ▷ $\Pi^{[P]}$ l'ammontare totale dei contributi (*premi*)
- ▷ $X^{[P]}$ l'ammontare totale aleatorio dei benefici pagati
- ▷ $Z^{[P]}$ il risultato netto prodotto dal pool

$$Z^{[P]} = \Pi^{[P]} - X^{[P]}$$

Il tempo (cioè il “time-value” del denaro) è trascurato, dato il riferimento a un breve intervallo di tempo (ad es. 1 anno)

Se

$Z^{[P]} > 0 \Rightarrow$ utile dell'assicuratore

$Z^{[P]} < 0 \Rightarrow$ perdita dell'assicuratore

Rischi trasferiti all'assicuratore: *rischi puri*

Rischio dell'assicuratore: *rischio speculativo*

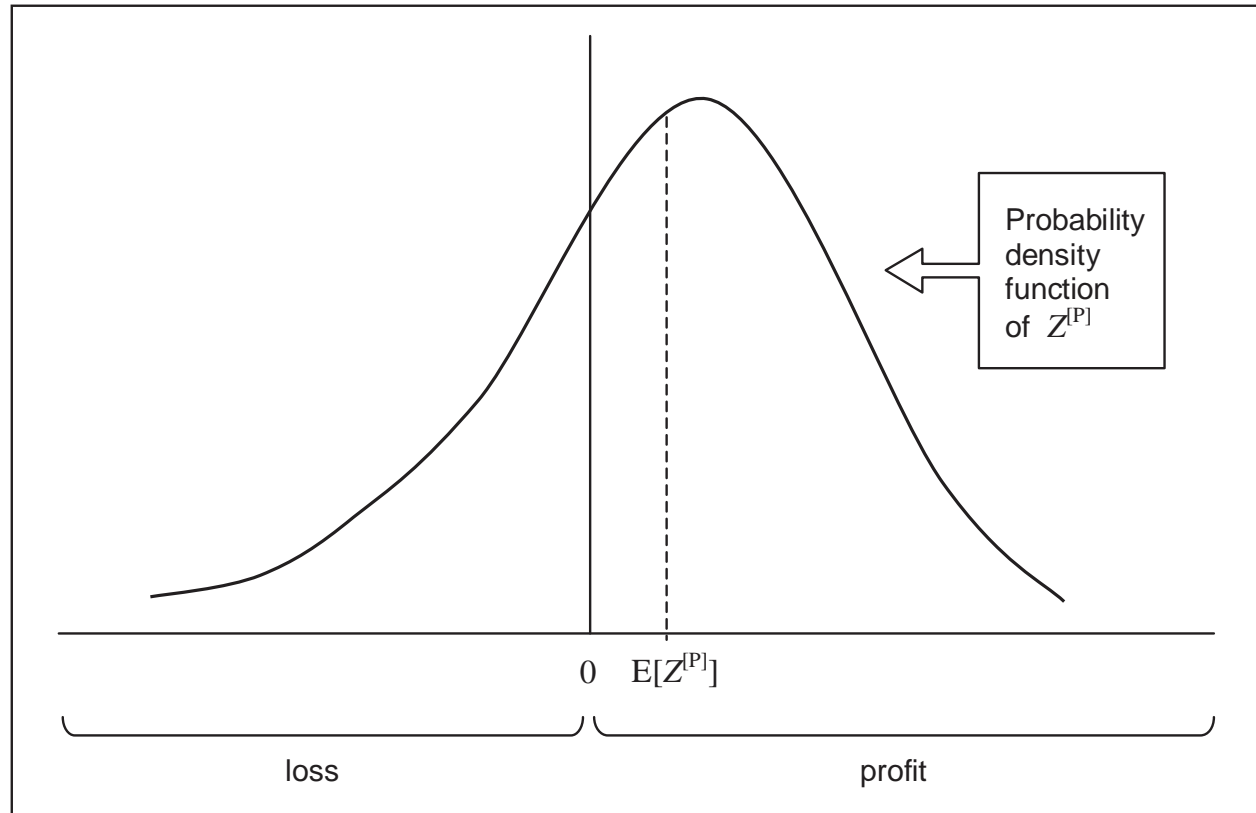
Trasformazione dei rischi mediante pooling, in caso di pool gestito da un assicuratore:

1. rischiosità relativa decrescente (in termini di indice di rischio)
2. shift da rischi puri a rischio speculativo

Distribuzione di probabilità del risultato netto $Z^{[P]}$ (vedi Figura):

- $\mathbb{E}[Z^{[P]}] > 0 \Rightarrow$ ammontare totale di premi $\Pi^{[P]}$ maggiore del pagamento totale atteso $\mathbb{E}[X^{[P]}] \Rightarrow$ caricamento di sicurezza incluso nei premi
- nonostante il caricamento di sicurezza, elevata probabilità di perdita; per ridurre tale probabilità \Rightarrow azioni di risk management (oltre a un eventuale aumento del caricamento di sicurezza); esempio: allocazione di capitale (vedi VaR)

Trasferimento di rischi (cont.)



Distribuzione di probabilità del risultato netto prodotto dal pool

1.7 PRODOTTI ASSICURATIVI

LA COPERTURA ASSICURATIVA. CONDIZIONI DI POLIZZA

Trasferimento di un rischio individuale a un assicuratore: basato sul *contratto*, la cui evidenza documentale è data dalla *polizza assicurativa*

Il pagamento del premio finanzia i benefici (o *prestazioni*), da liquidare secondo le *condizioni di polizza*

Vari tipi di benefici, in particolare:

1. rimborso di spese pagate dall'assicurato, per esempio a causa di responsabilità civile; ammontare pagato come beneficio determinato da varie condizioni che limitano l'intervallo di importi pagati dall'assicuratore
2. un'indennità che copre la perdita subita a causa di un sinistro, es. incendio; copertura usualmente parziale secondo le condizioni di polizza
3. ammontare prefissato, stabilito nel contratto; tipo di beneficio comune nelle assicurazioni vita

ALCUNI ESEMPI

Riferimento al **Caso 2**

La copertura assicurativa può riguardare i seguenti rischi:

- (a) perdita potenziale (danno), che può verificarsi al più una volta nel periodo contrattuale
- (b) possibile decesso dell'assicurato
- (c) possibile invalidazione dell'assicurato (in particolare implicante invalidità permanente), ad es. a causa di infortunio

Il prodotto assicurativo che copre

rischio (a): *assicurazione non-vita*

rischio (b): *assicurazione vita*

rischio (c): *assicurazione vita o non-vita, anche a seconda della normativa*

Riferimento al **Caso 3b** e al **Caso 3c**

Rischio di pagare benefici a dipendenti in caso di invalidità permanente trasferibile all'assicuratore mediante contratti di *assicurazione collettiva (o di gruppo)*

Riferimento al **Caso 4b** (decesso dell'assicurato entro r anni)

Assicurazione temporanea caso morte: prodotto assicurativo che estende a più anni la copertura (b) del Caso 2

Riferimento al **Caso 4a** (Necessità di risorse disponibili al tempo di pensionamento)

Assicurazione di capitale differito: l'assicurato paga un premio alla stipulazione del contratto (o una sequenza di premi periodici, dalla stipulazione in avanti), e otterrà l'importo assicurato alla scadenza se in vita (nulla essendo pagato in caso di decesso prima della scadenza). Possibile durata lunga del contratto (ad es. 10 o più anni)
⇒ importanza del fattore tempo

Rif. al **Caso 4c** (Esaurimento progressivo delle risorse disponibili al pensionamento)

Rendita vitalizia: l'assicuratore paga una rata periodica per tutta la durata rimanente di vita dell'assicurato (*vitaliziato*) \Rightarrow il rischio originato dall'aleatorietà della durata di vita è assunto dall'assicuratore. Importante ruolo del tempo, in quanto la durata potenziale della rendita vitalizia (tipicamente dalla età di pensionamento, ad es. 65) può essere di 25, 30 anni o più

IL PREMIO DEI PRODOTTI ASSICURATIVI

I premi pagati devono far fronte (secondo un criterio stabilito) ai benefici aleatori e differiti pagati dall'assicuratore

Ipotesi: premio pagato alla stipulazione del contratto (quindi non rateizzato in una sequenza di premi periodici) \Rightarrow *premio unico*

Consideriamo il calcolo del premio su base individuale (singolo assicurato e relativa copertura assicurativa), trascurando effetti del risk pooling

Il premio (individuale) deve essere basato su un "riassunto" dei benefici aleatori e differiti \Rightarrow il premio rappresenta un *valore* dei benefici

Benefici consistenti, in generale, in una sequenza di importi aleatori pagati nel corso della durata contrattuale \Rightarrow riassunto:

- (a) rispetto al tempo \rightarrow valore attuale aleatorio dei benefici, riferito al tempo di stipulazione del contratto
- (b) rispetto all'aleatorietà \rightarrow valore sintetico della distribuzione di probabilità del valore attuale aleatorio dei benefici (valore atteso, valore modale, ecc)

Passo (a): scelta del *tasso annuo di interesse* per attualizzare i benefici (o, più in generale, struttura a termine dei tassi di interesse); se durata contrattuale molto breve (1 anno, o meno), questo passo può essere saltato, per lo scarso impatto del tempo sul valore dei benefici

Passo (b):

1. scelta di appropriate *basi statistiche* per costruire la distribuzione di probabilità del valore attuale aleatorio dei benefici
2. scelta di valori sintetici di tale distribuzione

Prodotti assicurativi (cont.)

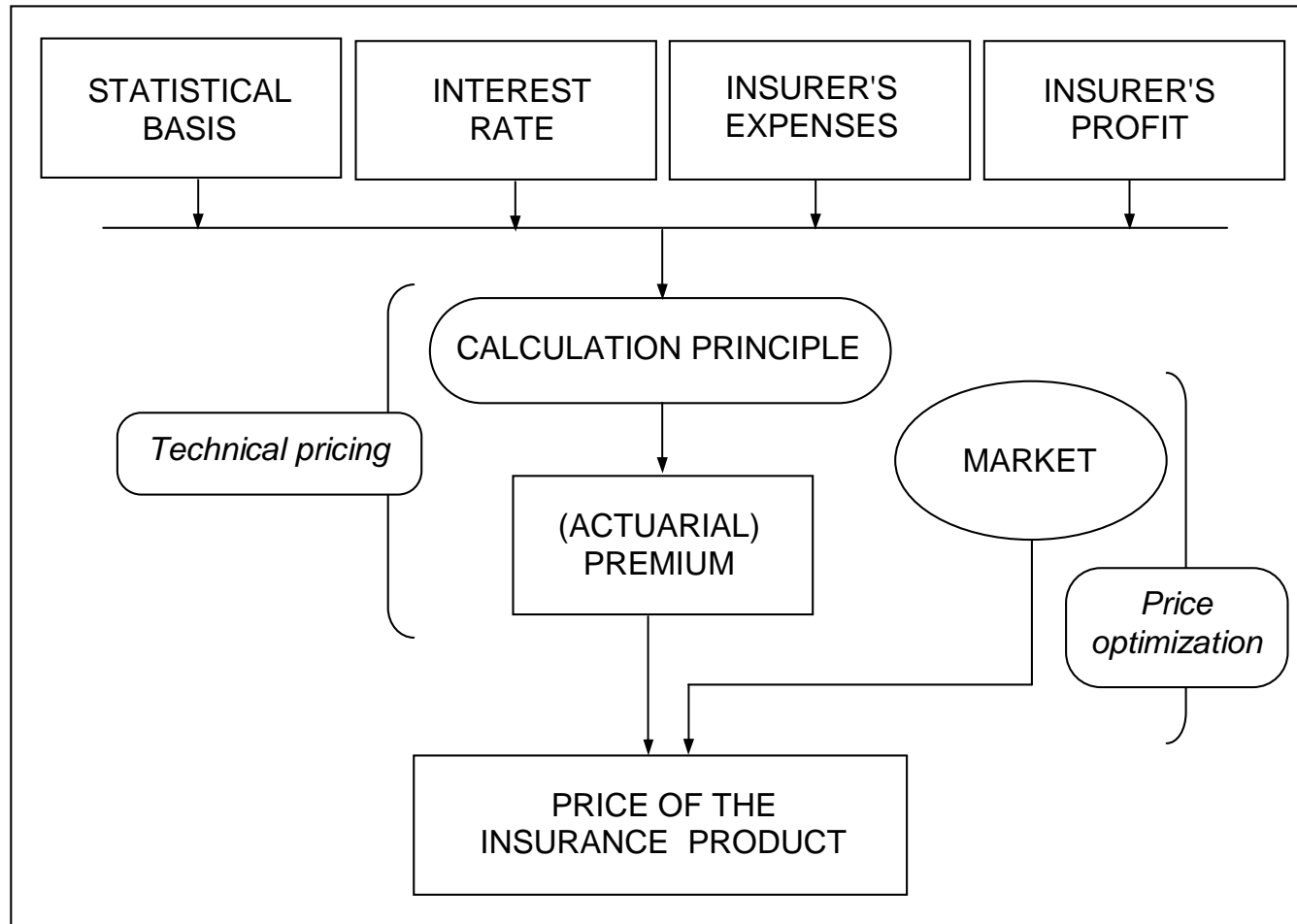
L'assicuratore sostiene anche *spese* non direttamente connesse con il pagamento di benefici, per esempio spese generali \Rightarrow necessità di caricare quote di tali spese agli assicurati, mediante aumento di premio, cioè *caricamento per spese*

Infine, ulteriore caricamento di premio per costruire un margine di *utile* (e coprire il costo del capitale proprio allocato \Rightarrow *creazione di valore*)

Tali elementi (tasso d'interesse, base statistica, quota di spese, margine di utile) costituiscono gli ingredienti di una "ricetta", detta *principio di calcolo del premio*; il risultato è il *premio attuariale*

Altri ingredienti possono influire sul *prezzo* del prodotto assicurativo: in particolare, concorrenza sul mercato assicurativo \Rightarrow riduzione del prezzo

Prodotti assicurativi (cont.)



Calcolo del prezzo di un prodotto assicurativo

CALCOLO DEL PREMIO

Consideriamo il calcolo del *premio puro* (o *netto*)

- trascuriamo spese e relativi caricamenti
- margine di utile \Rightarrow vedi i vari casi

Riferimento al **Caso 2**

Breve durata del contratto \Rightarrow effetto del tempo trascurabile

Beneficio dato, per definizione, dall'ammontare della perdita:

$$X = \begin{cases} x & \text{se } \mathcal{E} \\ 0 & \text{se } \bar{\mathcal{E}} \end{cases}$$

Sia p la probabilità dell'evento $\mathcal{E} \Rightarrow$ valore atteso del beneficio dato da

$$\mathbb{E}[X] = x p$$

(coincidente con la perdita attesa)

Si assuma come premio, P , della copertura assicurativa il valore atteso della perdita:

$$P = x p \quad (*)$$

Risultato: dal generico contratto, l'assicuratore

- ottiene un utile, uguale a P , in caso di non sinistro
- subisce una perdita, $P - x$, in caso di sinistro

In termini formali, risultato aleatorio Z dal generico contratto:

$$Z = P - X$$

Valore atteso nullo del risultato aleatorio:

$$\mathbb{E}[Z] = P - \mathbb{E}[X] = 0$$

Calcolo del premio secondo la (*): *principio di equità*

$\Rightarrow P = \text{premio equo}$

Pool di n rischi: contratti senza sinistro ($n - k$) finanziano contratti (k) con sinistro, secondo il principio di mutualità (vedi Figura)

Il conseguente equilibrio riflette, a livello di pool, la logica del principio di equità

Equilibrio tecnico (ex-ante) raggiunto se e solo se introito totale uguale a pagamento totale:

$$n P = k x$$

cioè

$$n x p = k x$$

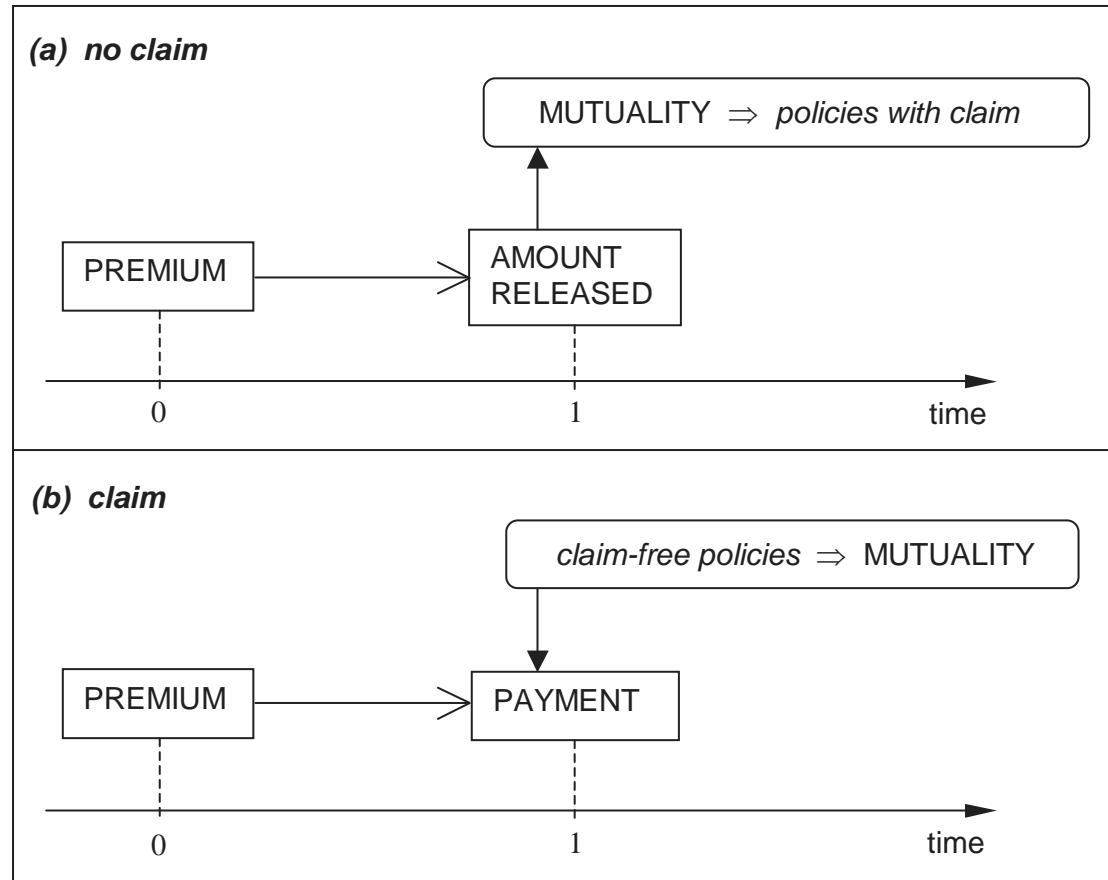
e quindi $k = n p$, cioè numero effettivo di sinistri coincidente con numero atteso di sinistri

Osservazione

Se $n p$ non intero, si ha certamente $k \neq n p$

In particolare, se n e/o p sono “piccoli” può risultare $0 < n p < 1$ e quindi certamente $k \neq n p \Rightarrow$ *scarti* rispetto al valore atteso $n p$ inevitabili

Prodotti assicurativi (cont.)



Mutualità in un pool di rischi. Caso 2

Se $k > np$, l'assicuratore subisce una perdita

Per tenere bassa la probabilità di perdita \Rightarrow applicazione di un premio maggiore, Π

$$\Pi = P + m$$

con m ($m > 0$) “caricamento” del premio, cioè *caricamento di sicurezza* (maggiore livello di “sicurezza” nella gestione del pool)

$\Pi =$ premio puro o netto (al netto del caricamento per spese)

Risultato aleatorio del generico contratto con premio Π :

$$Z = \Pi - X$$

con valore atteso

$$\mathbb{E}[Z] = \Pi - \mathbb{E}[X] = m$$

\Rightarrow caricamento di sicurezza $m =$ utile atteso dal contratto

A livello di pool: se $k = n p$, il caricamento di sicurezza globale $n m$ è l'utile prodotto dal pool. Duplice scopo del caricamento di sicurezza:

- aumentare il livello di sicurezza (probabilità di coprire il pagamento totale)
- fornire all'assicuratore utile

Calcolo di m : varie formule possono essere usate, per esempio per legare il caricamento di sicurezza alla rischiosità del contratto o del portafoglio

I principi di calcolo del premio spesso si riferiscono direttamente al premio Π che include il caricamento di sicurezza

Per esempio, secondo il *principio del valore atteso*:

$$\Pi = (1 + \alpha) \mathbb{E}[X]$$

con $\alpha > 0$; allora (formula comune nella pratica attuariale)

$$m = \alpha \mathbb{E}[X] = \alpha x p$$

Interpretazione: risulta

$$\Pi = (1 + \alpha) x p$$

e, posto

$$p' = (1 + \alpha) p$$

si trova

$$\Pi = x p'$$

⇒ Π calcolato semplicemente come valore atteso della perdita aleatoria, usando una probabilità “aggiustata” p' ($p' > p$)

⇒ applicazione del criterio di valutazione basato sulle probabilità risk-adjusted

Dunque:

$$P = \mathbb{E}_p[X]; \quad \Pi = \mathbb{E}_{p'}[X]$$

Valore atteso del risultato aleatorio:

$$\mathbb{E}[Z] = \Pi - \mathbb{E}[X] = x (p' - p)$$

Approcci:

- scelta di un valore per $\alpha \Rightarrow$ esempio di *caricamento di sicurezza esplicito*
- “aumento” diretto della probabilità di perdita \Rightarrow *caricamento di sicurezza implicito*

Altri principi di calcolo del premio (per tener conto della “dispersione” di X , in particolare nel caso di “grandi rischi”):

▷ *principio della varianza:*

$$\Pi = \mathbb{E}[X] + \gamma \text{Var}[X]$$

▷ *principio dello scarto quadratico medio:*

$$\Pi = \mathbb{E}[X] + \delta \sigma[X]$$

▷ *principio del percentile:* dato ε (esempio $\varepsilon = 0.05$),

$$\Pi \text{ tale che } \mathbb{P}[X > \Pi] = \varepsilon$$

Riferimento al **Caso 4b** (assicurazione temporanea caso morte)

Sia C la somma (costante) assicurata; si supponga che la somma sia pagata alla fine dell'anno di decesso, se l'assicurato muore entro il periodo di copertura assicurativa di r anni

Premio pari al valore atteso del beneficio aleatorio attualizzato Y :

$$Y = \begin{cases} C(1+i)^{-1} & \text{se l'assicurato muore nel primo anno} \\ C(1+i)^{-2} & \text{se l'assicurato muore nel secondo anno} \\ \dots & \dots \\ C(1+i)^{-r} & \text{se l'assicurato muore nell'anno } r \\ 0 & \text{altrimenti, cioè assicurato in vita al tempo } r \end{cases}$$

Calcolare il valore atteso $\mathbb{E}[Y]$

Si assuma che le probabilità degli eventi sopra considerati possano essere ricavate da un'appropriata base statistica

Sia (secondo l'usuale notazione attuariale) ${}_{h-1|1}q_x$ la probabilità che l'assicurato, di età x alla stipulazione del contratto, deceda tra le epoche $h - 1$ e h , cioè durante l' h -esimo anno

Per il principio di equità, il premio P è dato da:

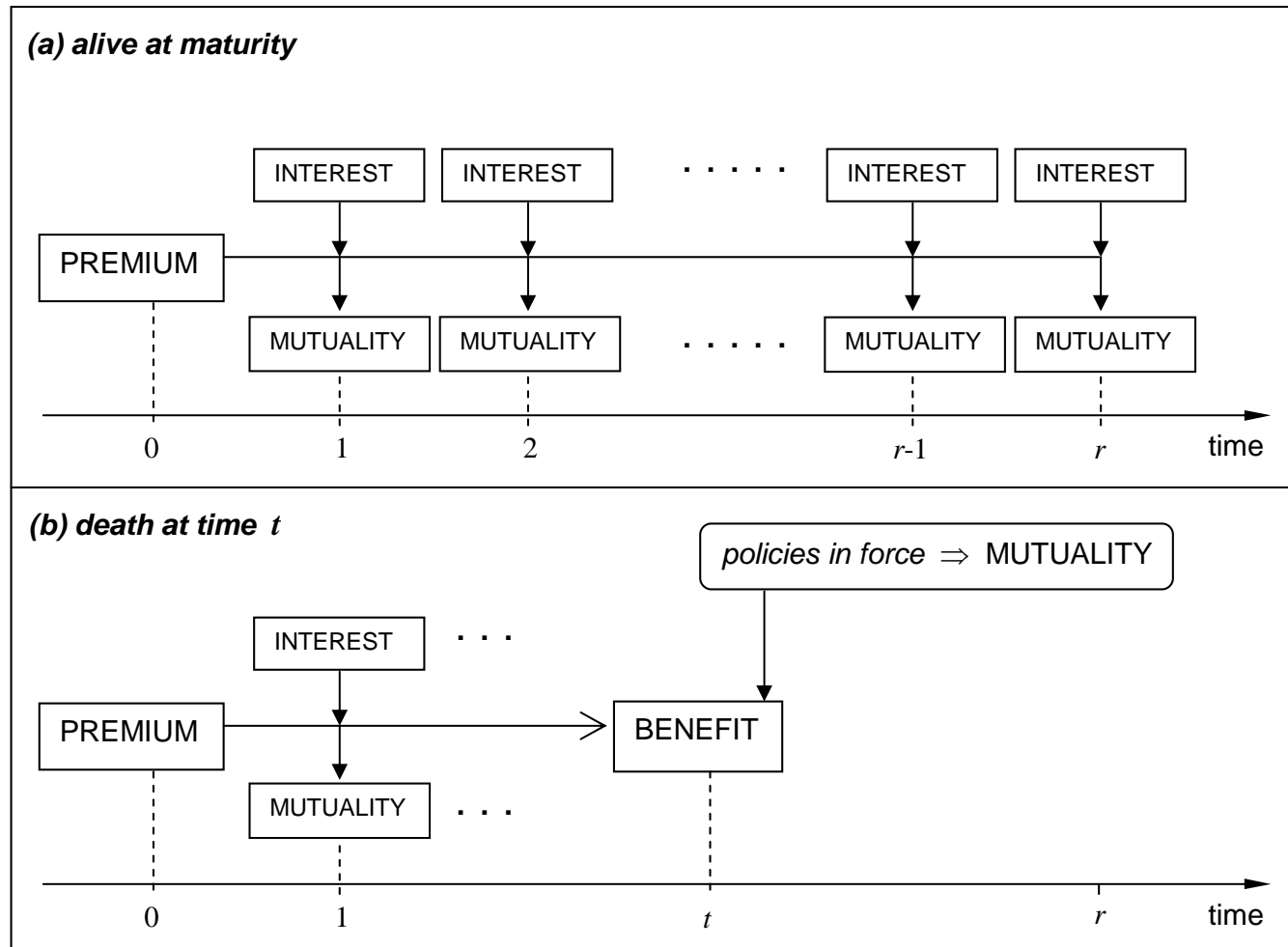
$$P = \mathbb{E}[Y] = C \left((1+i)^{-1} {}_{0|1}q_x + (1+i)^{-2} {}_{1|1}q_x + \cdots + (1+i)^{-r} {}_{r-1|1}q_x \right)$$

Dal generico contratto, l'assicuratore

- ottiene un utile se l'assicurato è in vita a scadenza (nessun beneficio pagato)
- subisce una perdita in caso di decesso prima della scadenza r

Nel pool di rischi, i contratti senza decesso finanziano i contratti colpiti da decesso secondo il principio di mutualità (vedi Figura)

Prodotti assicurativi (cont.)



Mutualità in un pool di rischi. Caso 4b

Nessun caricamento di sicurezza (esplicito) nella formula

Possibilità di caricamento implicito di sicurezza come segue

1. Sia i una stima realistica del tasso di interesse (supposto costante) ottenuto dall'assicuratore investendo il premio. Per attualizzare i benefici si adotti un tasso i' ($i' < i$) \Rightarrow un tasso d'interesse minore di quello realistico è accreditato all'assicurato
2. Sia ${}_{h-1|1}q_x$, $h = 1, 2, \dots, m$ una rappresentazione realistica della mortalità dell'assicurato. Per il calcolo del valore atteso si adottino probabilità ${}_{h-1|1}q'_x$, con ${}_{h-1|1}q'_x > {}_{h-1|1}q_x$, per $h = 1, 2, \dots, r$ (per es. ricavate dalla mortalità di una popolazione generale, anziché da quella di un gruppo selezionato di assicurati)

Si calcoli il premio come segue:

$$II = C \left((1 + i')^{-1} {}_{0|1}q'_x + (1 + i')^{-2} {}_{1|1}q'_x + \dots + (1 + i')^{-r} {}_{r-1|1}q'_x \right)$$

Riferimento al **Caso 4a** (Assicurazione di capitale differito)

Siano S la somma assicurata, r la scadenza contrattuale

Premio pari al valore atteso del beneficio aleatorio attualizzato Y :

$$Y = \begin{cases} S(1+i)^{-r} & \text{se assicurato in vita al tempo } r \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare il valore atteso $\mathbb{E}[Y]$

Sia ${}_r p_x$ la probabilità che una persona di età x alla stipulazione del contratto sia in vita al tempo r

Premio P , secondo il principio di equità:

$$P = \mathbb{E}[Y] = S(1+i)^{-r} {}_r p_x$$

Risulta

$$S = P (1 + i)^r \frac{1}{{}_r p_x}$$

ed essendo ${}_r p_x < 1$ si ha

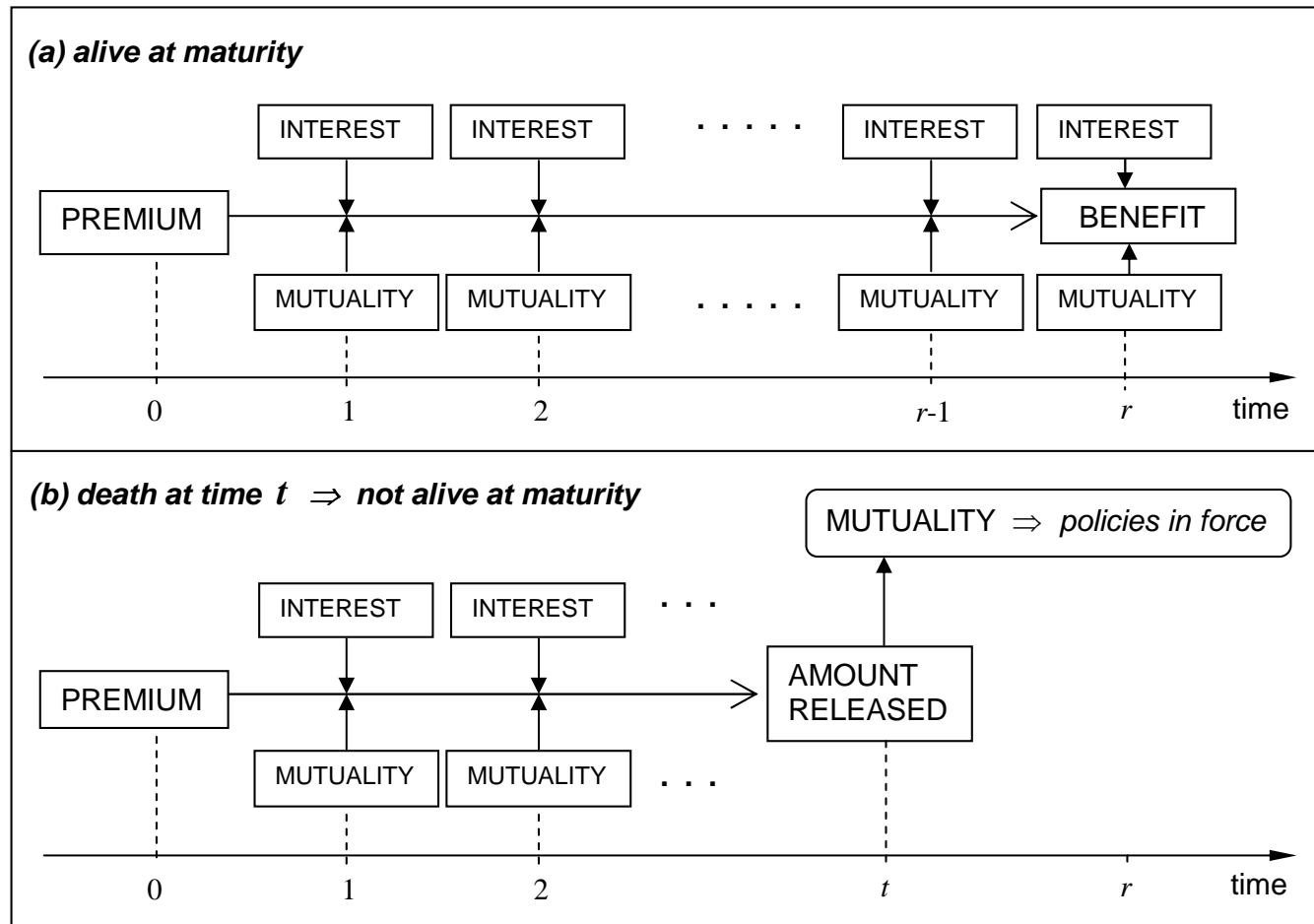
$$S > P (1 + i)^r$$

Il processo di accumulazione che porta da P al beneficio S si basa su:

- (a) la componente *finanziaria*, cioè l'interesse (garantito) accreditato all'assicurato (al tasso annuo i)
- (b) la componente *biometrica* (o *demografica*), cioè i contributi dai contratti che terminano prima della scadenza a causa di decesso dell'assicurato, e il cui premio accumulato fino al decesso è rilasciato ed accreditato ai contratti ancora in vita

⇒ Mutualità secondo il meccanismo descritto al punto (b) (vedi Figura)

Prodotti assicurativi (cont.)



Mutualità in un pool di rischi. Caso 4a

Nessun caricamento di sicurezza (esplicito) nella formula

Un caricamento di sicurezza implicito può essere incluso nel premio, con procedura analoga a quella adottata nella temporanea caso morte

Quindi:

$$\Pi = S (1 + i')^{-r} {}_r p'_x$$

con $i' < i$ e ${}_r p'_x > {}_r p_x$

Osservazione: la mortalità degli assicurati con capitale differito è solitamente minore di quella della popolazione generale (autoselezione) \Rightarrow la probabilità ${}_r p'_x$ non può essere ricavata da una tavola di mortalità di popolazione, e quindi va valutata ad-hoc

Valore attuale aleatorio del risultato dal generico contratto:

$$Z = \Pi - Y$$

Valore attuale atteso del risultato:

$$\mathbb{E}[Z] = \Pi - \mathbb{E}[Y] = S \left((1 + i')^{-r} {}_r p'_x - (1 + i)^{-r} {}_r p_x \right)$$

BASI TECNICHE

Base tecnica: insieme di dati ed ipotesi che costituiscono gli ingredienti per il calcolo del premio (ed altre valutazioni, per es. relative al calcolo di riserve, utili attesi, ecc.)

Riferimento agli elementi per il calcolo del *premio netto* (o *puro*), trascurando spese dell'assicuratore e relativi caricamenti del premio

Nel prodotto assicurativo “base” (Caso 2) la base tecnica è data dalla sola probabilità p

In prodotti assicurativi vita (es. assicurazione temporanea caso morte e assicurazione di capitale differito) la base tecnica consiste nel tasso di interesse i e nelle probabilità di decesso o di sopravvivenza (cioè la tavola da cui tali probabilità sono essere ricavate)

Caricamento di sicurezza implicito richiede due basi tecniche:

- *base di primo ordine*, consistente nel tasso di interesse i' e le probabilità q' o p' , chiamata anche *base di pricing*, o *base prudenziale*
- *base di secondo ordine*, consistente nel tasso di interesse i (o una struttura a termine di tassi di interesse), e le probabilità q o p ; fornisce una descrizione attendibile dello scenario finanziario e demografico; detta anche *base realistica* o *base di scenario*

RISERVE

Riferimento: prodotti assicurativi

- temporanea caso morte (caso 4b)
- capitale differito (caso 4a)

a premio unico

Subito dopo l'incasso del premio

- ▷ il relativo ammontare (al netto di possibili spese iniziale) disponibile all'assicuratore deve essere investito in *attivi (assets)*
⇒ rendimento (possibilmente più alto del tasso d'interesse accreditato ai contratti)
- ▷ si origina un *passivo (liability)*, determinato dagli impegni dell'assicuratore nei confronti dell'assicurato (caso 4a), e del pool di assicurati (caso 4b)

Attivi e passivi generati dai contratti \Rightarrow due aspetti del processo di *riservazione*

Riserve devono essere costituite a causa del differimento dei benefici rispetto al premio unico (in generale: a causa del mismatching temporale tra premi e benefici)

Riserve “tecniche”, chiamate in assicurazioni vita *riserve matematiche* \Rightarrow non devono essere confuse con le riserve “patrimoniali” che risultano dall’accumulazione di utili non distribuiti e costituiscono parte del capitale proprio

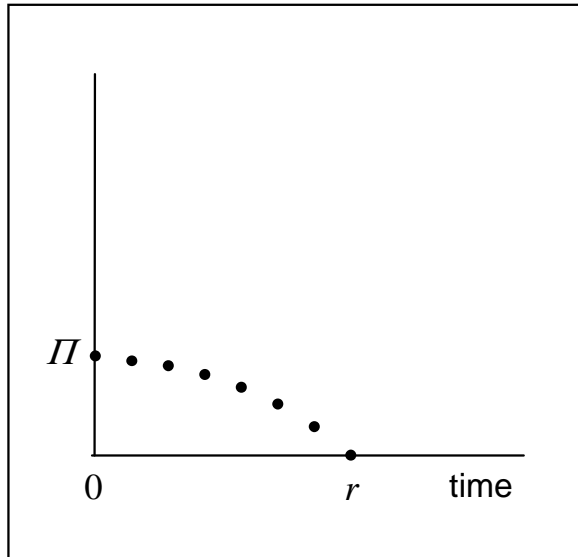
Per ogni contratto \Rightarrow profilo temporale della riserva dipendente da:

- ▷ tipo di benefici
- ▷ articolazione temporale del pagamento premi (premio unico o premi periodici)

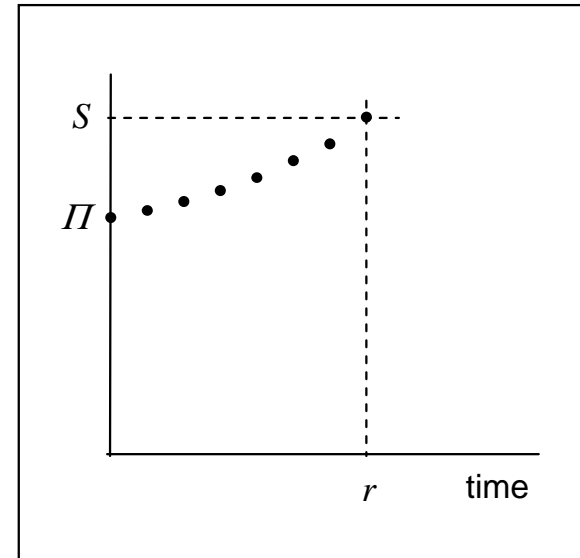
Prodotti assicurativi a premio unico

- *Assicurazione temporanea caso morte*: per ciascun assicurato in vita, la riserva, inizialmente (tempo 0) uguale al premio unico Π , è annualmente incrementata dall'interesse accreditato, e diminuita dal prelevamento per pagare i capitali caso morte secondo il principio di mutualità. La variazione annuale della riserva è (usualmente) negativa. A scadenza (tempo r) la riserva è nulla non essendoci più impegno dell'assicuratore
- *Assicurazione di capitale differito*: dato il meccanismo di interesse/mutualità, la riserva è annualmente incrementata dell'interesse accreditato e del contributo dai contratti che terminano a causa dei decessi degli assicurati. A scadenza (prima del pagamento del capitale assicurato S) la riserva è $= S$

Prodotti assicurativi (cont.)



*Riserva matematica di un'assic.
temporanea caso morte*



*Riserva matematica di un'assic.
di capitale differito*

Osservazione

Le Figure rappresentano situazioni di “equilibrio”; in caso di utili generati dai contratti, gli attivi (in particolare alla fine del contratto) sono maggiori