

# 2 PORTAFOGLI DI RISCHI

**Ermanno Pitacco**

*Matematica attuariale delle assicurazioni vita*



2.1 Introduzione

2.2 Classi di rischio e classi di premio

## 2.1 INTRODUZIONE

### ALCUNE IDEE PRELIMINARI

Riferimento a

- portafoglio di coperture assicurative “base”; vedi **Caso 2** (possibile perdita di ammontare fissato)
- calcolo di premi netti (cioè senza caricamenti per spese)

Si assuma, per ciascun rischio, un premio proporzionale al beneficio (la “somma assicurata”)  $x$  pagato in caso di sinistro

Premio allora dato da  $x \hat{p}$ , dove  $\hat{p}$ , rappresenta il premio per unità di beneficio, usualmente chiamato *tasso di premio*

Scelte naturali:

- (a)  $\hat{p}$  uguale alla probabilità (realistica) di sinistro,  $p$ , come richiesto dal principio di equità applicato su base realistica
- (b)  $\hat{p}$  uguale alla probabilità risk-adjusted di sinistro,  $p'$ , sicché la rischiosità è considerata tramite caricamento di sicurezza implicito

I tassi di premio devono riflettere, almeno in una certa misura, la probabilità di sinistro  $\Rightarrow$  un insieme di tassi di premio,  $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots$ , devono essere usati per calcolare premi per rischi con varie probabilità di sinistro

L'insieme di regole che legano i tassi di premio alle probabilità di sinistro costituiscono la base della *tariffazione* (che include anche caricamenti per spese, possibili sconti, ecc.)

## 2.2 CLASSI DI RISCHIO E CLASSI DI PREMIO

### STRUTTURA DEL PORTAFOGLIO

Portafoglio P costituito da  $n$  rischi “elementari”

Rischio  $j$ :

$$X^{(j)} = \begin{cases} x^{(j)} & \text{se } \mathcal{E}^{(j)} \\ 0 & \text{se } \bar{\mathcal{E}}^{(j)} \end{cases}$$

con probabilità (realistica):

$$p^{(j)} = \mathbb{P}[\mathcal{E}^{(j)}] = \mathbb{P}[X^{(j)} = x^{(j)}]$$

Pagamento totale di portafoglio:

$$X^{[P]} = \sum_{j=1}^n X^{(j)}$$

## Classi di rischio e classi di premio (cont.)

Risultato di portafoglio  $Z^{[P]}$  (qualunque sia il principio di calcolo del premio ed i tassi di premio):

$$Z^{[P]} = \text{INTROITO TOTALE PREMI} - X^{[P]}$$

Valore atteso del risultato di portafoglio:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z^{[P]}] &= \text{INTROITO TOTALE PREMI} - \mathbb{E}[X^{[P]}] \\ &= \text{INTROITO TOTALE PREMI} - \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[X^{(j)}]\end{aligned}$$

### RISCHI OMOGENEI

Si assuma che gli  $n$  rischi in  $P$  siano omogenei in probabilità

$$p^{(j)} = p \quad \text{per } j = 1, 2, \dots, n$$

con  $p$  = probabilità naturale (o realistica)

Si assuma come premio per il rischio  $j$  (secondo il principio di equità)

$$P^{(j)} = \mathbb{E}[X^{(j)}] = x^{(j)} p$$

⇒ Tasso di premio = probabilità  $p$  ⇒ caricamento di sicurezza nullo

A livello di portafoglio:

$$\mathbb{E}[Z^{[P]}] = \sum_{j=1}^n P^{(j)} - \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[X^{(j)}] = 0$$

cioè *equilibrio tecnico*:

INTROITO TOTALE PREMI = PAGAMENTO TOTALE ATTESO

### RISCHI NON OMOGENEI

Riferimento a portafoglio P di rischi con varie probabilità di sinistro

Per semplicità:

- $n_1$  rischi con probabilità  $p_1$
- $n_2$  rischi con probabilità  $p_2$

Si assuma  $p_1 < p_2$ ; sia  $n = n_1 + n_2$

Possibile suddivisione del portafoglio P in due *sottoportafogli* omogenei P1, P2

Pagamenti totali aleatori nei due sottoportafogli:

$$X^{[P1]} = \sum_{j=1}^{n_1} X^{(j)}$$

$$X^{[P2]} = \sum_{j=n_1+1}^n X^{(j)}$$



## Classi di rischio e classi di premio (cont.)

Risultati totali aleatori nei due sottoportafogli:

$$Z^{[P1]} = \text{INTROITO TOTALE PREMI IN P1} - \sum_{j=1}^{n_1} X^{(j)}$$

$$Z^{[P2]} = \text{INTROITO TOTALE PREMI IN P2} - \sum_{j=n_1+1}^n X^{(j)}$$

### ***Tassi di premio uguali alle probabilità di sinistro***

- nel sottoportafoglio P1 ( $j = 1, 2, \dots, n_1$ ):

$$P^{(j)} = x^{(j)} p_1$$

- nel sottoportafoglio P2 ( $j = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n$ ):

$$P^{(j)} = x^{(j)} p_2$$

## Classi di rischio e classi di premio (cont.)

Risulta:

$$\mathbb{E}[Z^{[P1]}] = \sum_{j=1}^{n_1} P^{(j)} - \sum_{j=1}^{n_1} \mathbb{E}[X^{(j)}] = 0$$

$$\mathbb{E}[Z^{[P2]}] = \sum_{j=n_1+1}^n P^{(j)} - \sum_{j=n_1+1}^n \mathbb{E}[X^{(j)}] = 0$$

Nel portafoglio complessivo P:

$$Z^{[P]} = Z^{[P1]} + Z^{[P2]}$$

e quindi:

$$\mathbb{E}[Z^{[P]}] = \mathbb{E}[Z^{[P1]}] + \mathbb{E}[Z^{[P2]}] = 0$$

Equilibrio tecnico in P1 e in P2  $\Rightarrow$  equilibrio tecnico in P

### **Unico tasso di premio**

L'equilibrio in ciascun sottoportafoglio è interpretabile come un “vincolo” nel calcolo dei premi, e, come tale, può essere “allentato”, o sostituito da vincoli più deboli

Si vuole attribuire lo stesso tasso di premio,  $\bar{p}$ , a tutti gli  $n = n_1 + n_2$  rischi:

$$P^{(j)} = x^{(j)} \bar{p}; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Risulta:

$$Z^{[P]} = \sum_{j=1}^n P^{(j)} - \sum_{j=1}^n X^{(j)} = \bar{p} \sum_{j=1}^n x^{(j)} - \sum_{j=1}^n X^{(j)}$$

con valore atteso:

$$\mathbb{E}[Z^{[P]}] = \bar{p} \sum_{j=1}^n x^{(j)} - \left[ p_1 \sum_{j=1}^{n_1} x^{(j)} + p_2 \sum_{j=n_1+1}^n x^{(j)} \right]$$

## Classi di rischio e classi di premio (cont.)

Si assegna come obiettivo l'equilibrio nell'intero portafoglio:

$$\mathbb{E}[Z^{[P]}] = 0$$

Quindi:

$$\bar{p} \sum_{j=1}^n x^{(j)} - \left[ p_1 \sum_{j=1}^{n_1} x^{(j)} + p_2 \sum_{j=n_1+1}^n x^{(j)} \right] = 0$$

da cui risulta

$$\bar{p} = \frac{p_1 \sum_{j=1}^{n_1} x^{(j)} + p_2 \sum_{j=n_1+1}^n x^{(j)}}{\sum_{j=1}^n x^{(j)}}$$

## Classi di rischio e classi di premio (cont.)

Tasso di premio  $\bar{p}$  = media aritmetica ponderata delle probabilità  $p_1$  e  $p_2$ , con pesi dati dai totali di somme assicurate nel primo e secondo sottoportafoglio rispettivamente

Con tutte le somme assicurate uguali a  $x$ , si ottiene

$$\bar{p} = p_1 \frac{n_1}{n} + p_2 \frac{n_2}{n} \quad (^\circ)$$

Tasso di premio  $\bar{p}$  = media aritmetica ponderata delle probabilità  $p_1$  e  $p_2$ , con pesi dati dalle dimensioni relative dei due sottoportafogli

Scopi possibili dell'unico livello di premio (a parte eventuale obbligatorietà):

- semplificare la tariffa assicurativa
- attribuire un premio “ragionevole” a rischi con elevata probabilità di sinistro, trasferendo parte del costo a rischi con bassa probabilità di sinistro

### **Una struttura generale**

Siano  $\bar{p}_1, \bar{p}_2$  due tassi di premio, attribuiti ai rischi con probabilità  $p_1, p_2$  rispettivamente

Premi dati dalle seguenti formule:

- nel sottoportafoglio P1:

$$P^{(j)} = x^{(j)} \bar{p}_1; \quad j = 1, 2, \dots, n_1$$

- nel sottoportafoglio P2:

$$P^{(j)} = x^{(j)} \bar{p}_2; \quad j = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n$$

Si assuma:

$$p_1 \leq \bar{p}_1 \leq \bar{p}_2 \leq p_2$$

## Classi di rischio e classi di premio (cont.)

Obiettivo: i tassi di premio  $\bar{p}_1$  e  $\bar{p}_2$  assicurano l'equilibrio tecnico a livello di portafoglio

$$\mathbb{E}[Z^{[P]}] = 0$$

e quindi:

$$\underbrace{\bar{p}_1 \sum_{j=1}^{n_1} x^{(j)} + \bar{p}_2 \sum_{j=n_1+1}^n x^{(j)}}_{\text{INTROITO TOTALE PREMI}} - \underbrace{\left[ p_1 \sum_{j=1}^{n_1} x^{(j)} + p_2 \sum_{j=n_1+1}^n x^{(j)} \right]}_{\text{PAGAMENTO TOTALE ATTESO}} = 0$$

Con tutte le somme assicurate uguali ( $x^{(j)} = x; j = 1, 2, \dots, n$ ):

$$\bar{p}_1 n_1 + \bar{p}_2 n_2 = p_1 n_1 + p_2 n_2 \quad ({}^{\circ\circ})$$

## Classi di rischio e classi di premio (cont.)

Si trova:

$$\bar{p}_1 \frac{n_1}{n} + \bar{p}_2 \frac{n_2}{n} = p_1 \frac{n_1}{n} + p_2 \frac{n_2}{n} \quad ({}^{\circ\circ})$$

⇒ la media aritmetica dei tassi di premio  $\bar{p}_1$  e  $\bar{p}_2$  deve essere uguale alla media aritmetica delle probabilità  $p_1$  e  $p_2$  con gli stessi pesi

Casi:

- ponendo  $\bar{p}_1 = p_1$  e  $\bar{p}_2 = p_2$  ⇒ tariffa “naturale”, con premi differenziati in base alle probabilità di sinistro
- ponendo  $\bar{p}_1 = \bar{p}_2$  ⇒ tariffa con un unico tasso di premio
- per trovare tariffe diverse, limitazione ai casi con

$$p_1 < \bar{p}_1 < \bar{p}_2 < p_2 \quad (*)$$



## Classi di rischio e classi di premio (cont.)

Le incognite  $\bar{p}_1$  e  $\bar{p}_2$  non possono essere univocamente determinate  
⇒ richiesta ulteriore condizione, per esempio:

$$\bar{p}_1 = \alpha \bar{p}_2 \quad (\alpha < 1)$$

$$\bar{p}_1 = \bar{p}_2 - \beta \quad (\beta > 0)$$

con  $\alpha$  e  $\beta$  tali che le disuguaglianze (\*) siano soddisfatte

Scopo di una tariffa di tale tipo: mantenere premi differenziati, attribuendo un premio “ragionevole” ai rischi con alta probabilità di sinistro, e trasferendo parte del costo ai rischi con bassa probabilità

### TARIFFE ED EQUILIBRIO TECNICO

Portafoglio con somme assicurate tutte uguali a  $x$

Calcolare  $\bar{p}$ , oppure  $\bar{p}_1, \bar{p}_2$ , assumendo come obiettivo il solo equilibrio a livello di portafoglio

I tassi di premio  $\bar{p}$  e  $\bar{p}_1, \bar{p}_2$  sono funzioni delle dimensioni,  $n_1$  e  $n_2$ , ipotizzate per i due sottoportafogli P1 e P2 con probabilità di sinistro  $p_1$  e  $p_2$  rispettivamente

Quando i premi sono attribuiti a un gruppo di nuovi assicurati, le dimensioni effettive dei due sottoportafogli non sono note

$\Rightarrow n_1$  e  $n_2$  sono solo stime dei numeri effettivi di assicurati

## Classi di rischio e classi di premio (cont.)

Siano  $n_1^*$ ,  $n_2^*$  le dimensioni effettive dei due sottoportafogli,  
 $n^* = n_1^* + n_2^*$ ; se:

$$\frac{n_1^*}{n^*} = \frac{n_1}{n} \quad \left( \text{e quindi} \quad \frac{n_2^*}{n^*} = \frac{n_2}{n} \right)$$

⇒ equilibrio tecnico (vedi formule (°) e (°°))

Se:

$$\frac{n_1^*}{n^*} \neq \frac{n_1}{n} \quad \left( \text{e quindi} \quad \frac{n_2^*}{n^*} \neq \frac{n_2}{n} \right)$$

⇒ equilibrio tecnico non realizzato

Situazione

$$\frac{n_1^*}{n^*} < \frac{n_1}{n} \quad \left( \text{e quindi} \quad \frac{n_2^*}{n^*} > \frac{n_2}{n} \right)$$

⇒ risultato atteso di portafoglio negativo

## Classi di rischio e classi di premio (cont.)

Formalmente:

- tariffa con unico tasso di premio  $\bar{p}$

$$\text{INTROITO TOTALE PREMI} = x n^* \bar{p} = x (n_1^* \bar{p} + n_2^* \bar{p})$$

$$\text{PAGAMENTO TOTALE ATTESO} = x (n_1^* p_1 + n_2^* p_2)$$

$$\text{RISULTATO ATTESO DI PORTAFOGLIO} = x (n_1^* (\bar{p} - p_1) + n_2^* (\bar{p} - p_2))$$

- tariffa con due tassi di premio  $\bar{p}_1, \bar{p}_2$

$$\text{INTROITO TOTALE PREMI} = x (n_1^* \bar{p}_1 + n_2^* \bar{p}_2)$$

$$\text{PAGAMENTO TOTALE ATTESO} = x (n_1^* p_1 + n_2^* p_2)$$

$$\text{RISULTATO ATTESO DI PORTAFOGLIO} = x (n_1^* (\bar{p}_1 - p_1) + n_2^* (\bar{p}_2 - p_2))$$

## Classi di rischio e classi di premio (cont.)

### Esempio

Portafoglio con somme assicurate tutte uguali a  $x$

Si definiscano due tariffe:

- tariffa A  $\Rightarrow$  tasso di premio  $\bar{p}$
- tariffa B  $\Rightarrow$  tassi di premio  $\bar{p}_1, \bar{p}_2$

entrambe costruite con l'ipotesi  $n_1 = 2 n_2$  (vedi Tabella 1)

$n_1$	$n_2$	$p_1$	$p_2$	Tariffa A	Tariffa B	
				$\bar{p}$	$\bar{p}_1$	$\bar{p}_2$
4 000	2 000	0.005	0.008	0.006	0.0055	0.007

Tabella 1 - Probabilità di sinistro e tassi di premio

## Classi di rischio e classi di premio (cont.)

Pagamento atteso ed introito premi corrispondenti a due portafogli effettivi, il primo implicante equilibrio tecnico, il secondo con pagamento atteso maggiore dell'introito premi e quindi non equilibrio (vedi Tabella 2)

$n_1^*$	$n_2^*$	Pagam. tot. atteso	Introito totale premi		Risultato tot. atteso	
			Tariffa A	Tariffa B	Tariffa A	Tariffa B
8 000	4 000	72 000	72 000	72 000	0	0
3 000	3 000	39 000	36 000	37 500	-3 000	-1 500

*Tabella 2 - Pagamento atteso, introito premi, risultato atteso di portafoglio*

Per il portafoglio di non-equilibrio, la tariffa A implica una perdita più elevata

### Osservazioni

- Equilibrio (atteso) a livello di portafoglio basato su trasferimenti monetari (quote di premi) da assicurati con premio maggiore del loro “vero” premio ad assicurati con premio minore del loro “vero” premio: *solidarietà* (tra assicurati). Il generico assicurato con probabilità di sinistro  $p_1$  trasferisce al pool l'importo

$$S_1^{(j)} = x^{(j)} \bar{p} - x^{(j)} p_1 > 0$$

mentre il pool trasferisce al generico assicurato con probabilità di sinistro  $p_2$  l'importo

$$S_2^{(j)} = x^{(2)} \bar{p} - x^{(j)} p_2 < 0$$

$S_1^{(j)}$  e  $S_2^{(j)}$  chiamati talvolta *premi di solidarietà*

## Classi di rischio e classi di premio (cont.)

- Tariffe basate sulla solidarietà possono causare *auto-selezione* degli assicurati, dato che soggetti costretti a dare solidarietà ad altri soggetti potrebbero rifiutare il contratto assicurativo, scegliendo altre soluzioni assicurative (o, più in generale, altre azioni di risk management). Conseguenza: formazione di un portafoglio con (relativa) prevalenza di rischi con alta probabilità di sinistro
- Entità del fenomeno di auto-selezione dipende da
  - come i soggetti percepiscono il meccanismo di solidarietà
  - tariffe adottate da concorrenti sul mercato assicurativo
- In pratica, meccanismi di solidarietà possono funzionare se obbligatori (per esempio, imposti dalla legislazione) o se costituiscono una diffusa pratica di mercato



### DA FATTORI DI RISCHIO A CLASSI DI PREMIO

Riferimento a una “popolazione”, per es. tutti i maschi viventi in Italia, nati in Italia nel periodo 1950-1970

La popolazione definita è eterogenea, in particolare in relazione al rischio di decesso:

- età attuale
- condizioni di salute
- occupazione
- ...

⇒ *vari fattori di rischio* che dovrebbero essere considerati nel valutare, per es., la probabilità di morte entro un anno

Si assuma che ciascun fattore di rischio possa assumere un dato numero (intero) di “valori”, quantitativi (es. età), o qualitativi (es. sesso)

## Classi di rischio e classi di premio (cont.)

Vedi esempio in Figura

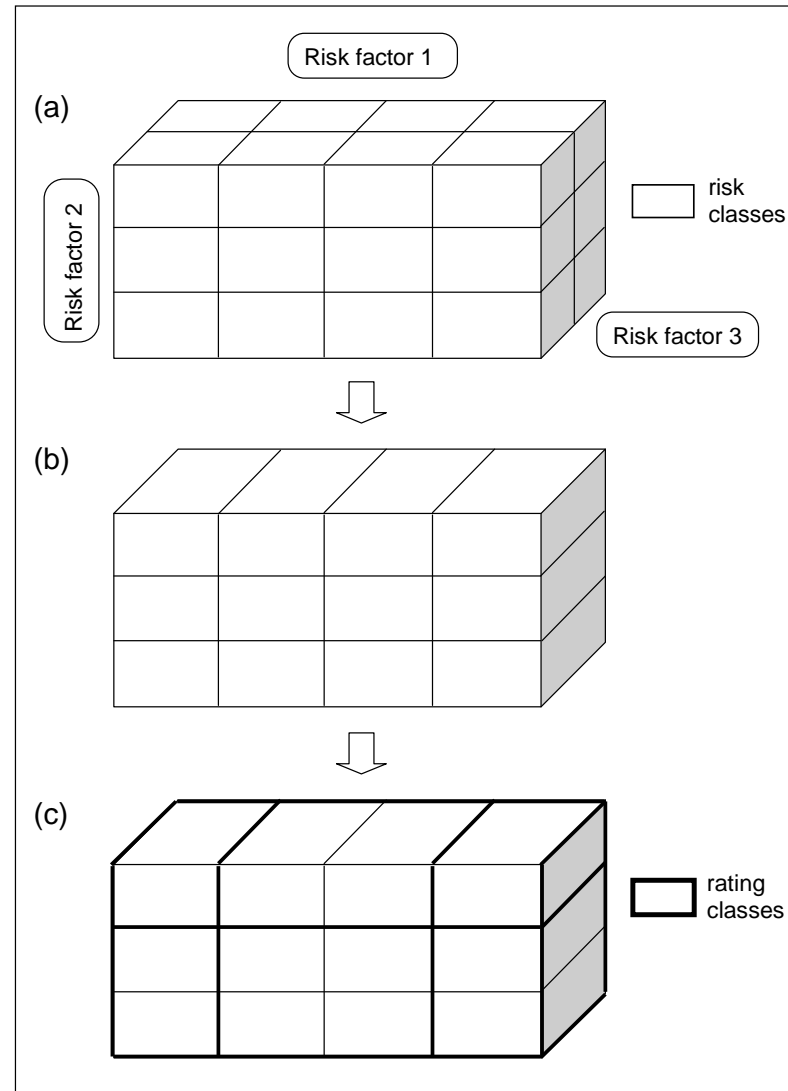
- tre fattori di rischio, con 4, 3 e 2 valori rispettivamente  
⇒ popolazione suddivisibile in  $4 \times 3 \times 2 = 24$  *classi di rischio*
- prima semplificazione: trascurare il fattore di rischio 3
- ulteriore semplificazione: raggruppamento di alcuni valori dei fattori 1 e 2
- risultato finale: popolazione suddivisa in  $3 \times 2 = 6$  *classi di premio*

Due o più classi di rischio aggregate in una classe di premio:

- ▷ alcuni assicurati pagano un premio maggiore del loro “vero” premio
- ▷ altri assicurati pagano un premio minore del loro “vero” premio

Equilibrio entro una classe di premio: trasferimento monetario tra individui appartenenti a diverse classi di rischio (*solidarietà*)

## Classi di rischio e classi di premio (cont.)



*Dai fattori di rischio alle classi di premio*

## Classi di rischio e classi di premio (cont.)

Se classi di premio coincidono con classi di rischio:

- tariffa “personalizzata” sulle caratteristiche di ciascun rischio assicurato
- (quasi) assenza di solidarietà (ineliminabile la solidarietà dovuta a fattori di rischio non osservabili)

Effetto di solidarietà tanto più forte quanto minore è il numero di classi di premio in relazione al numero di classi di rischio

Caso estremo nell'assicurazione privata: un'unica classe di premio a fronte di varie classi di rischio

Al di fuori delle assicurazioni private:

- principio di solidarietà comunemente applicato nelle assicurazioni sociali
- caso estremo: l'intera collettività nazionale contribuisce al finanziamento dei benefici, anche se solo una parte della popolazione stessa è titolata a ricevere i benefici

### TARIFFAZIONE DI ESPERIENZA

In assicurazione non vita, commisurare i premi alle caratteristiche di ciascun rischio può coinvolgere anche l'esperienza di sinistrosità individuale

Vari sistemi di tariffazione di esperienza (*experience rating*, o *merit rating* nelle assicurazioni R.C.Auto) implementati nella pratica assicurativa

Classi di premio definibili, per esempio, in base al numero di sinistri denunciati in precedenti anni di contratto  $\Rightarrow$  tariffazione in base a:

- *classificazione dei rischi a priori*, basata su fattori di rischio noti alla stipulazione del contratto
- *classificazione dei rischi a posteriori*, basata sull'esperienza di sinistrosità individuale, periodicamente rivedibile in base al variare dell'esperienza accumulata

### CROSS-SUBSIDY: MUTUALITÀ E SOLIDARIETÀ

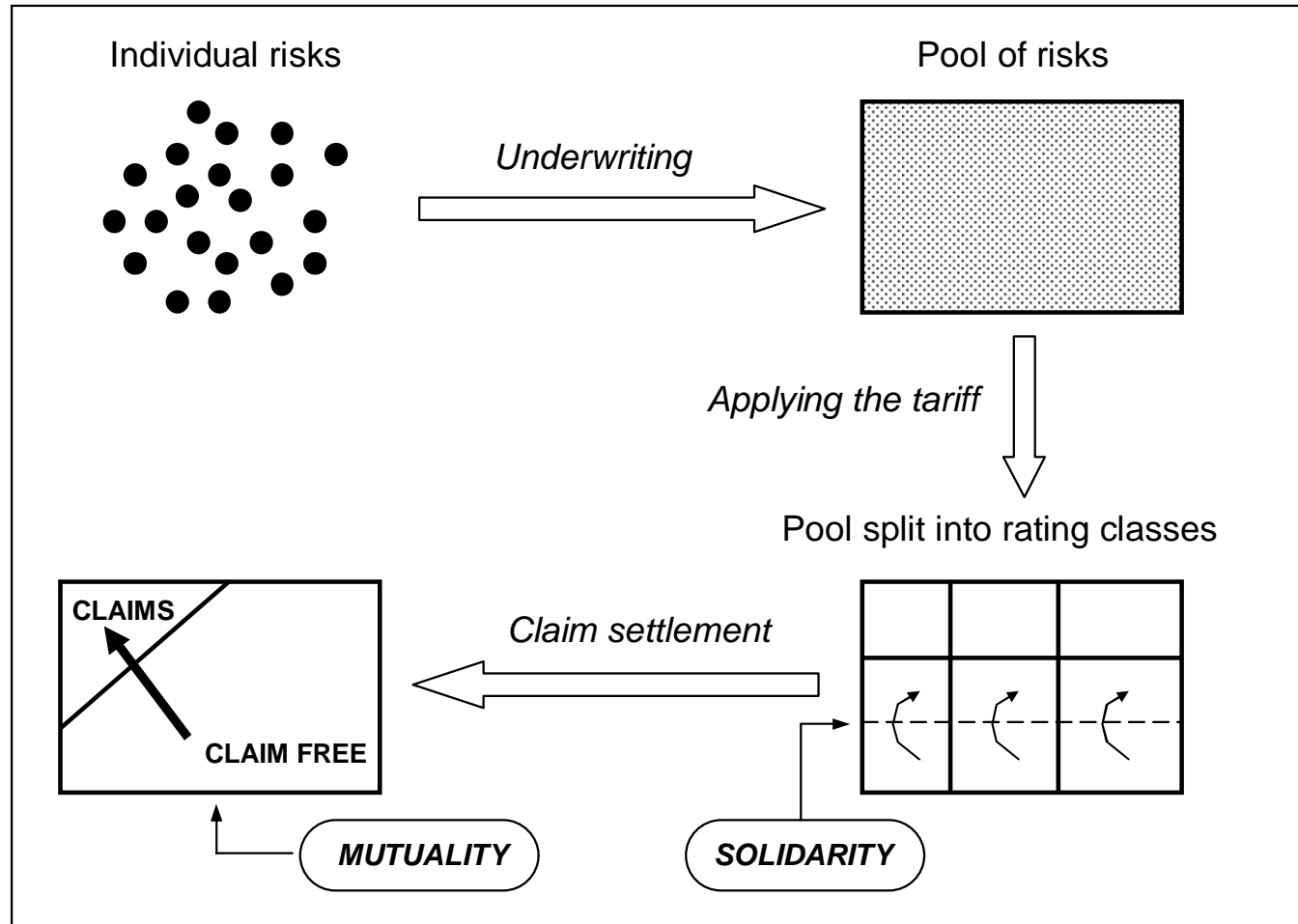
*Mutualità*: conseguenza del processo di pooling (e in particolare del trasferimento di rischi a un assicuratore)

- ▷ riguarda la fase di pagamento dei benefici  $\Rightarrow$  “direzione” ed “entità” note solo ex-post (dopo denunce sinistri)

*Solidarietà*: conseguenza dell’adozione di una tariffa con numero di classi di premio minore del numero di classi di rischio (presenza ed entità dell’effetto solidarietà strettamente dipendenti dalla struttura tariffaria)

- ▷ riguarda la fase di introito premi  $\Rightarrow$  direzione ed entità note ex-ante (immediatamente dopo la stipulazione dei contratti)

## Classi di rischio e classi di premio (cont.)



*Cross-subsidy: mutualità e solidarietà*