3 BASI BIOMETRICHE

Ermanno Pitacco

Matematica attuariale delle assicurazioni vita

3.1 Introduzione
3.2 Tavole di mortalità
3.3 Una “legge” di mortalità
3.4 Valori sintetici
3.5 Dal modello base a modelli più generali
3.6 Eterogeneità
3.7 Tavole selezionate
3.8 Dinamica della mortalità. Tavole proiettate
3.9 Modelli a tempo continuo

3.1 INTRODUZIONE

Alla stipulazione di contratti di assicurazione vita l'assicuratore assume rischi originati da

- investimenti
- durate aleatorie di vita degli assicurati
- spese
- ...

Consideriamo rischi legati a durate aleatorie di vita

Vari fattori di rischio (e possibili fattori di premio)

- età
- sesso
- professione
- ...

Strumento per descrivere l'andamento della mortalità in funzione dell'età: *tavola di mortalità* (o *tavola di sopravvivenza*)

3.2 TAVOLE DI MORTALITÀ

ELEMENTI DI UNA TAVOLA

Vedi la tavola seguente

- $x =$ età $(x = 0, 1, \dots)$
- $\ell_x =$ numero stimato di persone in vita in una generazione convenientemente definita (sequenza decrescente)
- $\omega =$ massima età raggiungibile (o *età estrema*), tale che $\ell_\omega > 0$ e $\ell_{\omega+1} = 0$ (nella tavola: $\omega = 108$)
- $d_x = \ell_x - \ell_{x+1} =$ numero di decessi tra le età esatte x e $x+1$, con
$$\sum_{x=0}^{\omega} d_x = \ell_0$$
- $q_x = \dfrac{d_x}{\ell_x} =$ probabilità di decesso entro 1 anno per una persona di età x

Grafico di ℓ_x: *curva di sopravvivenza*
grafico di d_x: *curva dei decessi*

x	ℓ_x	d_x	$1\,000\,q_x$
0	100 000	879	8.788
1	99 121	46	0.461
2	99 076	33	0.332
...	...	...	...
50	93 016	426	4.582
51	92 590	459	4.961
...	...	...	...
108	1	1	1 000.000
109	≈ 0	≈ 0	–

Tavola di mortalità

TAVOLE DI GENERAZIONE E TAVOLE DI PERIODO

Si supponga che l'osservazione statistica di una reale generazione fornisca la sequenza

$$\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_x, \dots, \ell_\omega$$

- osservazione *longitudinale* (o *per anno di nascita*)
- tavola risultante: *tavola di generazione* (o di *coorte*)
- richiesti per l'osservazione $\omega + 1$ anni (≈ 110)

Si supponga che l'osservazione statistica su una reale popolazione fornisca la sequenza

$$q_0, q_1, \ldots, q_x, \ldots, q_\omega$$

- osservazione *trasversale* (o *cross section*, o *per anno di decesso*)
  - ▷ si osserva la mortalità relativa a $\omega + 1$ generazioni reali
- tavola risultante: *tavola di periodo* (o di *contemporanei*)
- sufficiente per l'osservazione 1 anno (o $2 - 3$ anni, per maggiore affidabilità)
- tecnica usuale per costruire una tavola di mortalità (di una popolazione, un gruppo di assicurati, ecc.)

Riferimento a osservazione trasversale. Dalla sequenza di q_x calcolare la sequenza di ℓ_x come segue:

$$\ell_{x+1} = \ell_x\,(1 - q_x); \quad x = 0, 1, \dots, \omega - 1 \qquad (*)$$

con ℓ_0 (*radice* della tavola) assegnato, es. $\ell_0 = 100\,000$

$\ell_x =$ numero atteso di superstiti in una generazione *virtuale* (o *sintetica*), inizialmente costituita da ℓ_0 individui

q_x stimati in base alla mortalità osservata in un dato periodo
$\Rightarrow$ ipotesi sottostante la $(*)$: la mortalità alle varie età non cambia nel futuro (*mortalità statica*)

Evidenza statistica: mortalità variabile nel tempo (in particolare decrescente nel ventesimo secolo in molti paesi) $\Rightarrow$ *mortalità dinamica*

In assicurazione vita, uso di tavole di periodo limitato a prodotti di durata breve o media (5 - 10 anni)

Osservazione

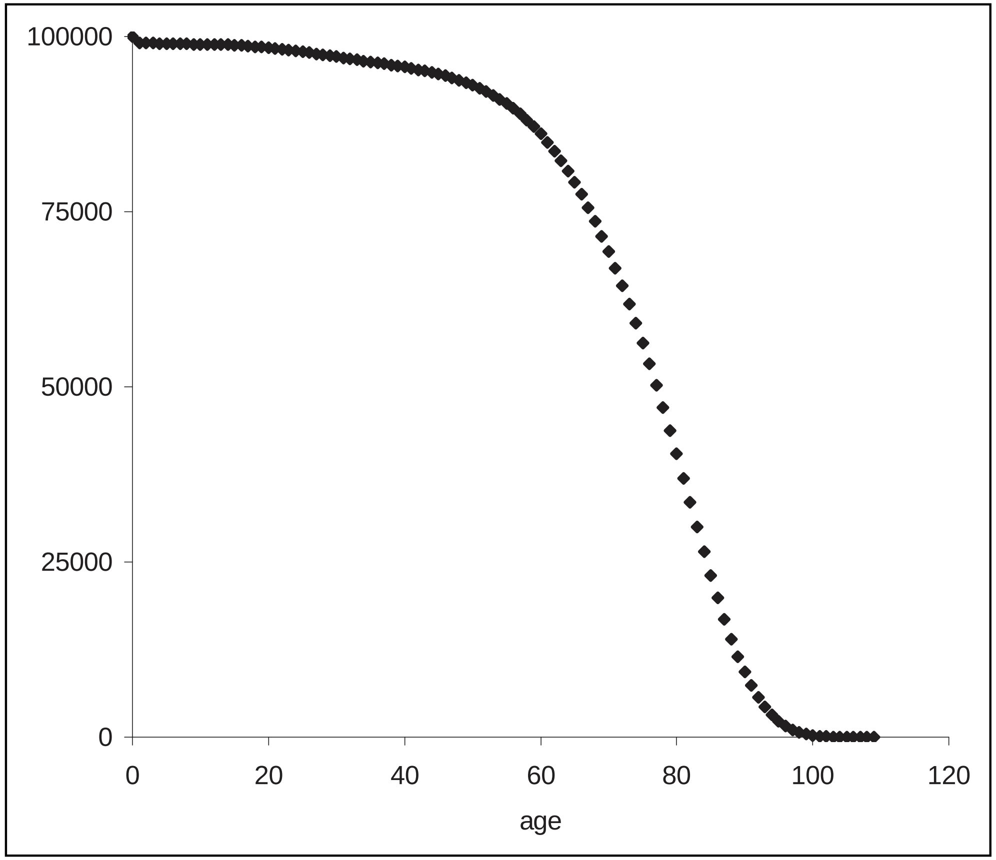
L'impostazione ora adottata è *discreta* rispetto al tempo ($\Rightarrow$ età intere); più avanti, impostazione con tempo continuo

Esempio

Dalle figure seguenti:

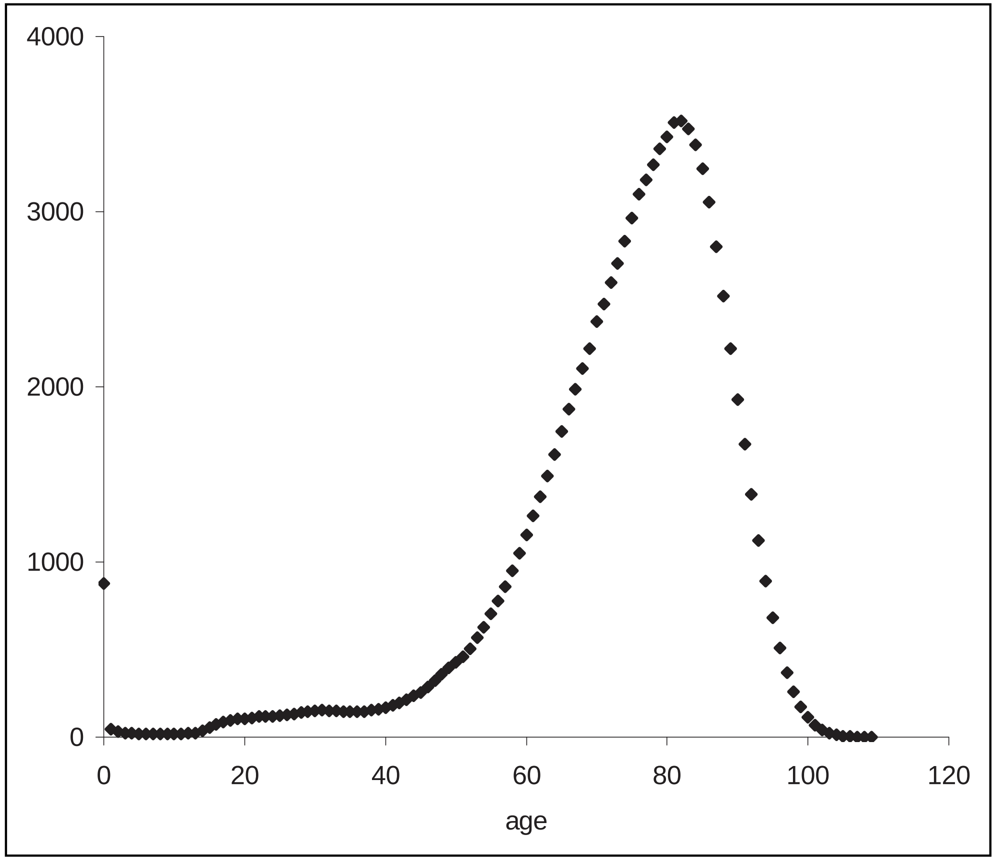
- *mortalità infantile*
- *picco di mortalità* ad età giovani, prevalentemente per cause accidentali
- *età di massima mortalità* (ad età anziane)

Il punto di massima mortalità (ad età anziane) nella curva dei decessi corrisponde al punto di flesso nella curva di sopravvivenza



ℓ_x *nella popolazione italiana maschile - 1992 (fonte: ISTAT)*

Tavole di mortalità *(cont.)*



d_x *nella popolazione italiana maschile - 1992 (fonte: ISTAT)*

COSTRUZIONE DI UNA TAVOLA DI PERIODO

Per $x = 0, 1, 2, \ldots, \omega$, calcolare

$$\hat{q}_x = \frac{\theta_x}{\mathrm{ETR}_x}$$

con:

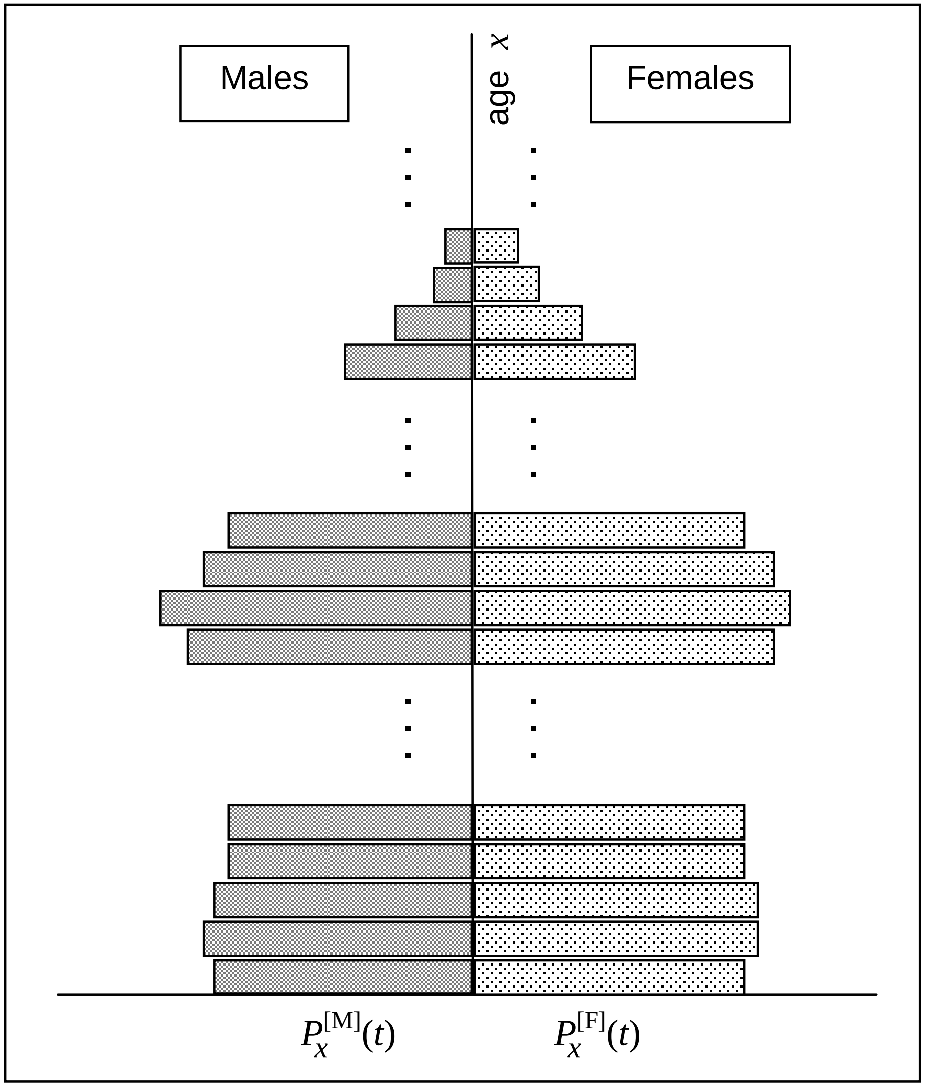
- θ_x = numero osservato di decessi tra le età x e $x + 1$
- ETR_x = numero di individui esposti al rischio

Metodo censuario per calcolare ETR_x (es. 1 anno di osservazione)

- $P_x(0)$ = popolazione di età tra x e $x + 1$ ad inizio anno
- $P_x(1)$ = popolazione di età tra x e $x + 1$ a fine anno

$$\mathrm{ETR}_x = \frac{P_x(0) + P_x(1) + \theta_x}{2}$$

Tavole di mortalità *(cont.)*



Struttura di una popolazione al tempo t, per sesso ed età

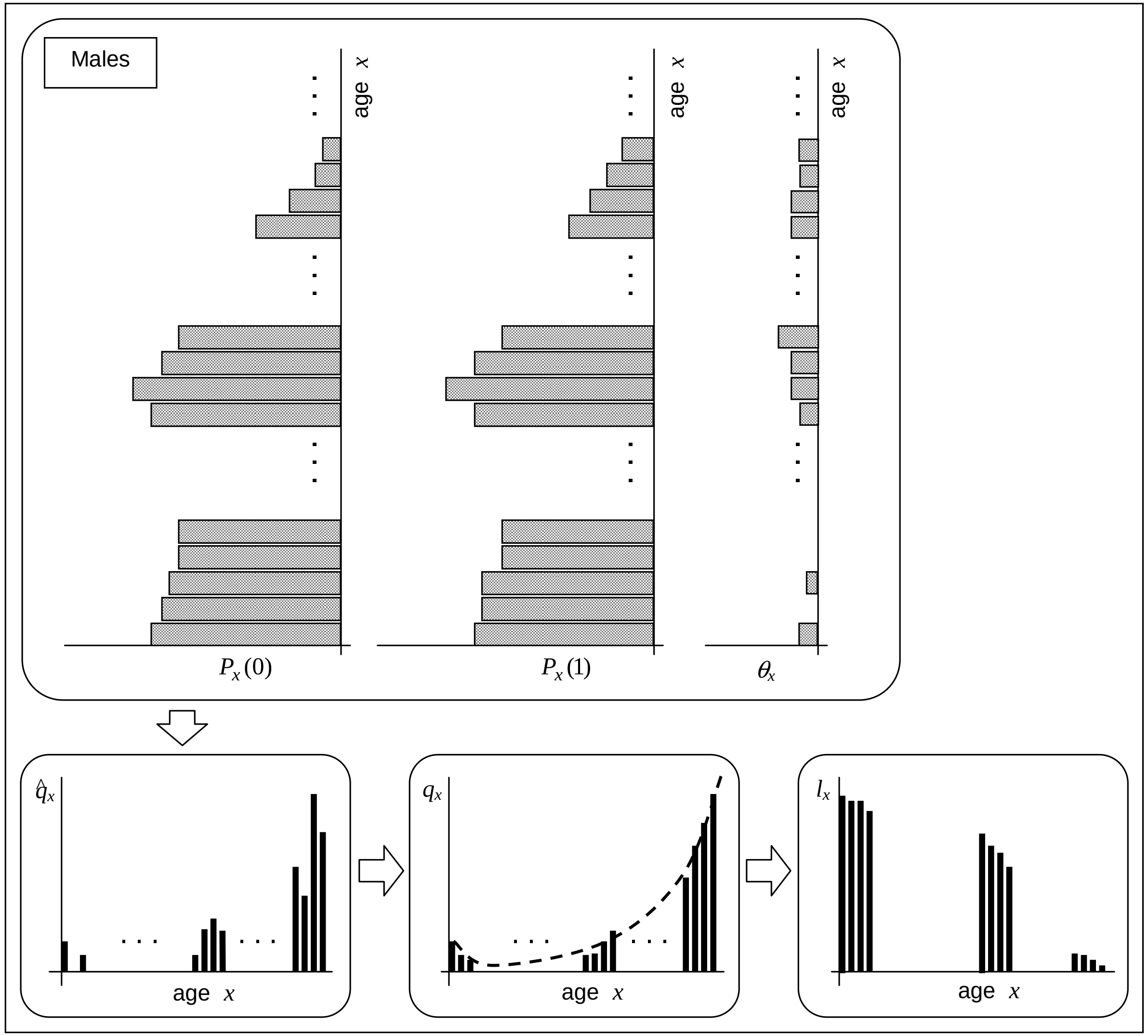
Possibili forti oscillazioni accidentali nella sequenza $\hat{q}_0, \hat{q}_1, \dots, \hat{q}_x, \dots$ soprattutto ad età molto anziane, a causa di valori ridotti di ETR_x

$$\hat{q}_0, \hat{q}_1, \dots, \hat{q}_x, \dots \;\Rightarrow\; \text{PEREQUAZIONE} \;\Rightarrow\; q_0, q_1, \dots, q_x, \dots$$

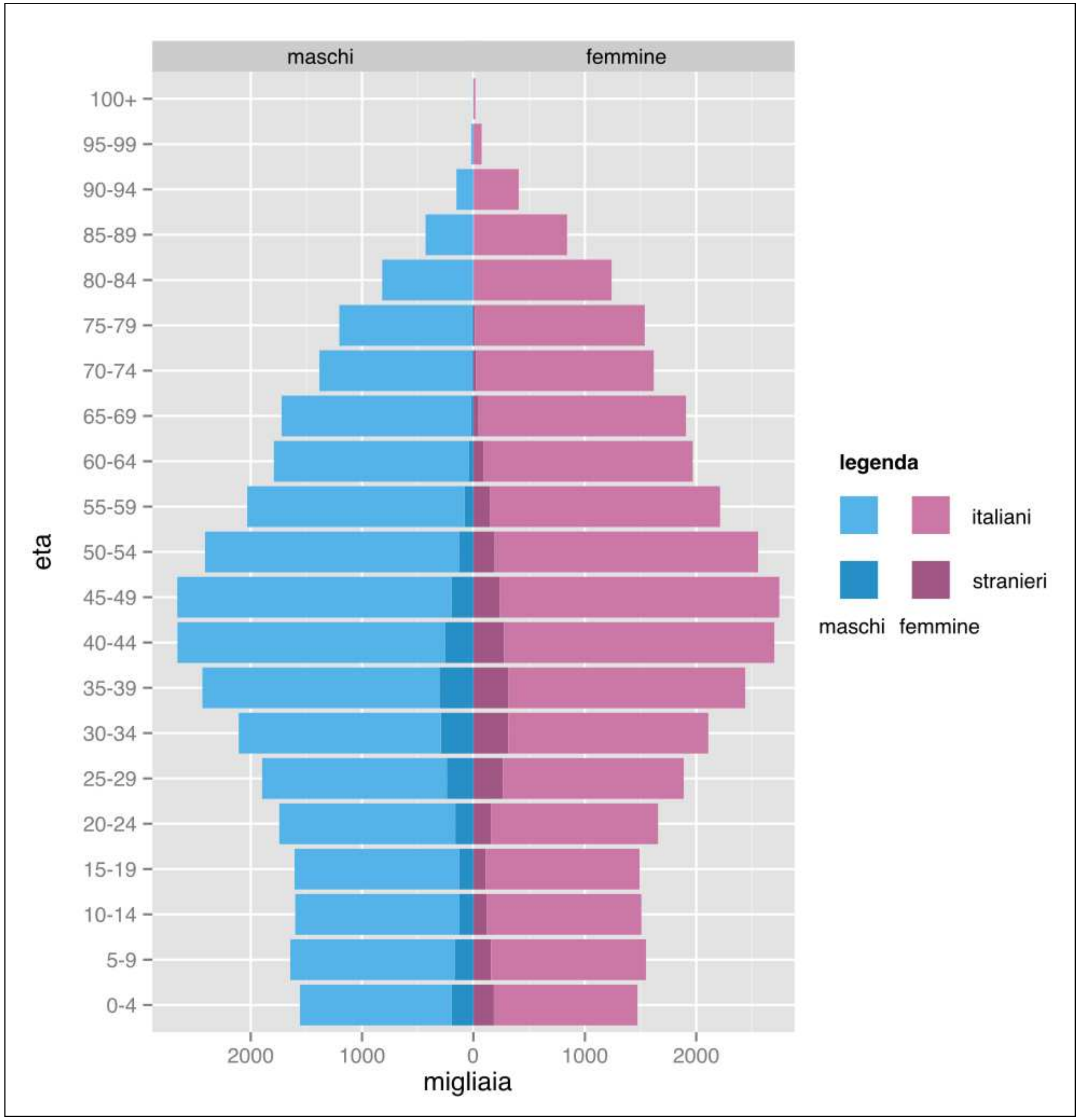
Perequazione:

- medie mobili
- modelli parametrici (“leggi”)

  ...

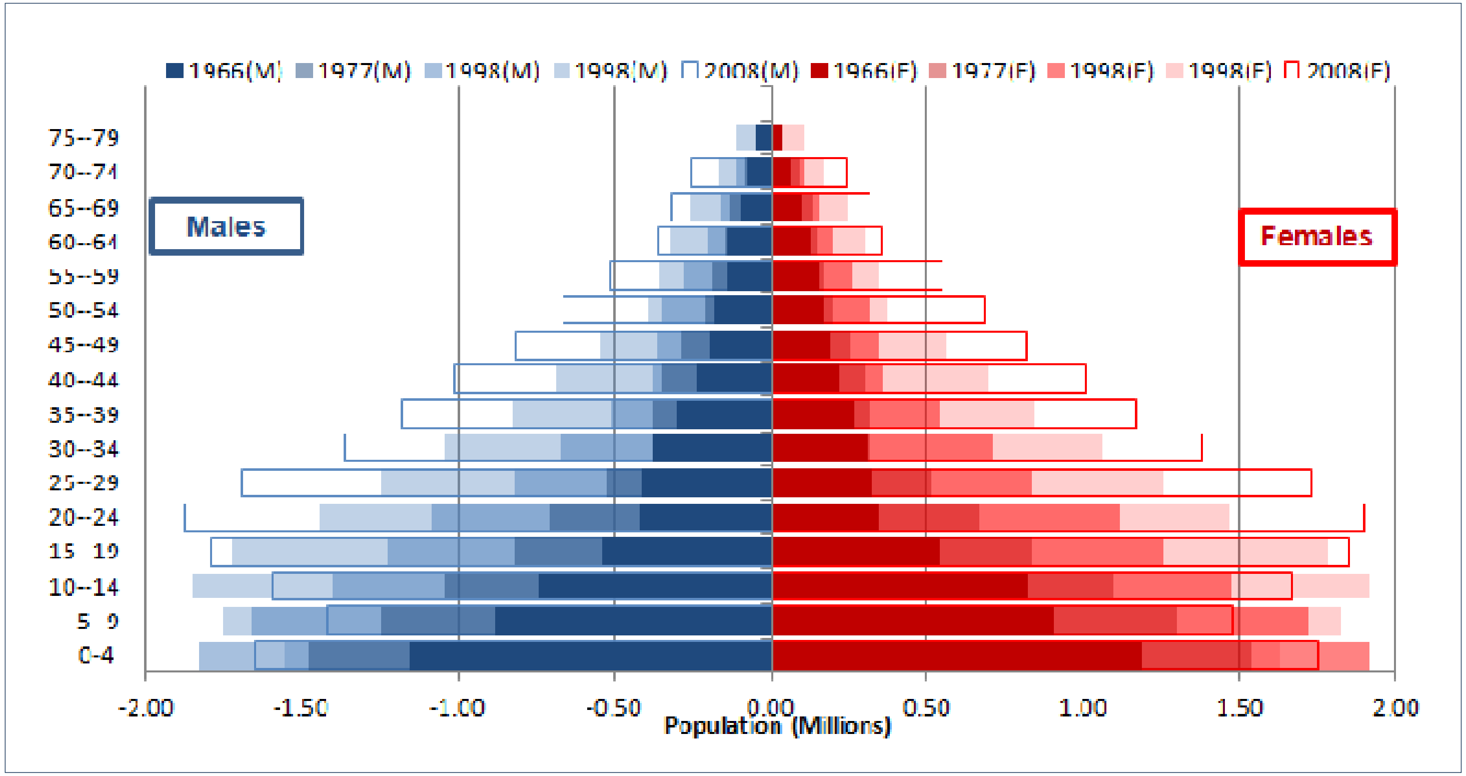


Dalla struttura di popolazione per età alla tavola di mortalità



Struttura della popolazione: Italia

Tavole di mortalità *(cont.)*



Struttura della popolazione: Algeria

TAVOLE "DI POPOLAZIONE" E TAVOLE "DI MERCATO"

Dati di mortalità provenienti da osservazioni relative a

- un'intera popolazione nazionale
- una specifica parte di una popolazione (esempio: pensionati, invalidi, ecc.)
- un portafoglio assicurativo
- un fondo pensioni
- . . .

Tavole di popolazione: costruite sulla base di osservazioni di mortalità relative a un'intera popolazione nazionale (solitamente suddivisa in femmine e maschi)

Tavole di mercato: costruite sulla base di osservazioni di mortalità relative a un insieme di portafogli assicurativi e/o fondi pensione

Tavole di mercato usualmente distinte per

- prodotti assicurativi con beneficio caso morte
- rendite vitalizie acquistate su base volontaria
- pensioni (cioè rendite vitalizie pagate ai membri di un fondo pensioni aziendale)

Motivo della distinzione: livelli di mortalità possono differire in misura significativa a causa dell'*autoselezione*

Tavole di mercato: dati basati sull'esperienza di portafogli

- calcolo di premi e riserve matematiche
- valutazione di utili attesi

Tavole di popolazione:

- punto di partenza in caso di indisponibilità di tavole di mercato
- livelli di mortalità più elevati rispetto a quelli espressi dalle tavole di mercato
- valutazione *prudenziale* (o *safe-side*) della mortalità in portafogli assicurativi con benefici caso morte
- calcolo di premi con caricamento di sicurezza implicito

TAVOLA DI MORTALITÀ COME MODELLO BIOMETRICO DISCRETO

Sequenza $\{\ell_x\}$: punto di partenza per definire probabilità (relative ad una persona di età x)

Modello discreto, con età e tempi interi

Probabilità

- di essere in vita ad età $x+1$:

$$p_x = 1 - q_x = \frac{\ell_{x+1}}{\ell_x}$$

- di essere in vita ad età $x+h$:

$$_hp_x = p_x \, p_{x+1} \dots p_{x+h-1} = \frac{\ell_{x+h}}{\ell_x}$$

(con $_0p_x = 1$); in particolare:

$$_1p_x = p_x$$ (*“tasso” di sopravvivenza*)

Probabilità

- di decesso prima dell'età $x+h$:

$$ {}_hq_x = 1 - {}_hp_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+h}}{\ell_x} $$

(con ${}_0q_x = 0$); in particolare:

$$ {}_1q_x = q_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+1}}{\ell_x} = \frac{d_x}{\ell_x} $$ (*"tasso" di mortalità*)

- di decesso tra le età $x+h$ e $x+h+k$:

$$ {}_{h|k}q_x = {}_hp_x \; {}_kq_{x+h} = \frac{\ell_{x+h} - \ell_{x+h+k}}{\ell_x} $$

in particolare:

$$ {}_{h|1}q_x = \frac{\ell_{x+h} - \ell_{x+h+1}}{\ell_x} = \frac{d_{x+h}}{\ell_x} $$

MISURE MONOANNUALI DI MORTALITÀ

Si consideri la probabilità

$$ {}_{h|1}q_x = {}_h p_x \, q_{x+h} = \frac{\ell_{x+h} - \ell_{x+h+1}}{\ell_x} = \frac{d_{x+h}}{\ell_x} $$

Con riferimento a un neonato, cioè $x = 0$

$$ {}_{h|1}q_0 = \frac{d_h}{\ell_0} $$

Notare che

$$ \sum_{h=0}^{\omega} {}_{h|1}q_0 = \frac{1}{\ell_0} \sum_{h=0}^{\omega} d_h = 1 $$

Le ${}_{h|1}q_0$ costituiscono la distribuzione di probabilità della durata aleatoria di vita di un neonato (con determinazioni intere $0, 1, \ldots, \omega$)

Si consideri la probabilità ${}_{h|1}q_0$, usando la notazione ${}_{x|1}q_0$

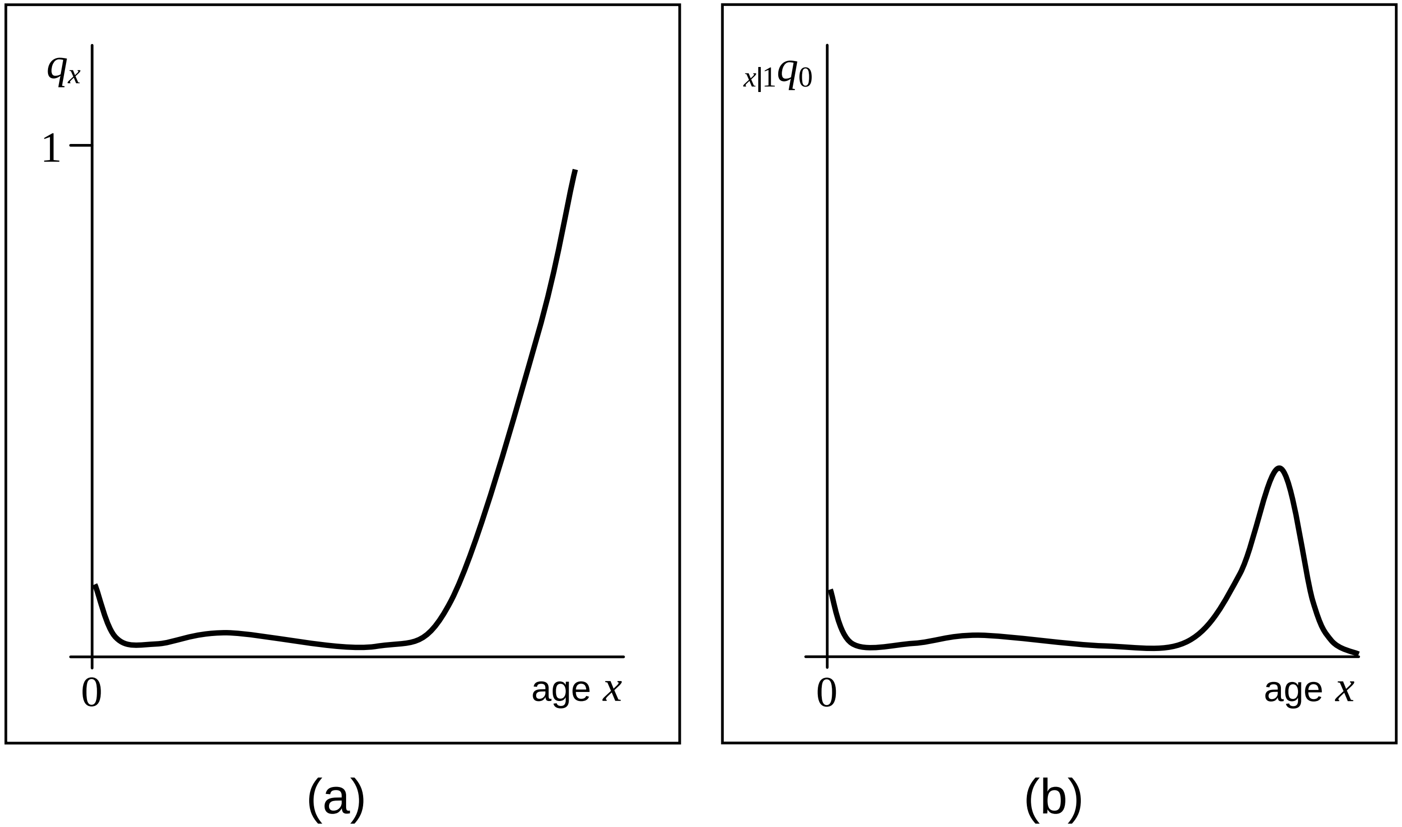
Due differenti probabilità esprimenti la mortalità su base monoannuale, entrambe relative al decesso tra le età x e $x+1$:

- $q_x = \dfrac{d_x}{\ell_x}$ riferita ad una persona in vita ad età x
- ${}_{x|1}q_0 = \dfrac{d_x}{\ell_0}$ riferita ad un neonato

Vedi Figure

Nota:

- quando ℓ_x è prossimo a ℓ_0, i due grafici sono molto simili; quando ℓ_x decresce fortemente, q_x cresce definitivamente
- il comportamento di ${}_{x|1}q_0$ riflette il comportamento di d_x (le due quantità sono una proporzionale all'altra)



Probabilità monoannuali di decesso

Altre misure monoannuali di mortalità

Tasso centrale di mortalità:

$$m_x = \frac{d_x}{\dfrac{\ell_x + \ell_{x+1}}{2}}$$

Confronto tra m_x e probabilità q_x:

- q_x rapporta d_x a ℓ_x (numero di esposti al rischio = numero "iniziale" di persone nell'intervallo di età $(x, x+1)$)
- m_x rapporta d_x a $\dfrac{\ell_x + \ell_{x+1}}{2}$ (numero di "esposti al rischio" = numero "centrale" di persone nello stesso intervallo di età)

Mortality odds:

$$\phi_x = \frac{q_x}{1 - q_x}$$

Da $0 < q_x < 1$ (per $x < \omega$) $\Rightarrow$ $\phi_x > 0$. Gli odds facilitano la scelta di una formula matematica per esprimere l'andamento della mortalità in funzione dell'età

Tavole di mortalità *(cont.)*

Definizione	Nome usuale	Età di riferimento	Esposti al rischio
$q_x = \dfrac{d_x}{\ell_x}$	tasso (iniziale) di mortalità	x	ℓ_x
${}_{x\|1}q_0 = \dfrac{d_x}{\ell_0}$	tasso di mortalità differito	0	ℓ_0
$m_x = \dfrac{d_x}{\frac{\ell_x + \ell_{x+1}}{2}}$	tasso centrale di mortalità	x	$\dfrac{\ell_x + \ell_{x+1}}{2}$
$\phi_x = \dfrac{q_x}{1 - q_x}$	odds	x	ℓ_x

Misure monoannuali di mortalità

Esempio 1

x	ℓ_x
0	$100\,000$
$\dots$	$\dots$
40	$98\,000$
41	$97\,920$
42	$97\,800$
43	$97\,650$
44	$97\,450$
45	$97\,220$
$\dots$	$\dots$
65	$85\,000$
66	$84\,600$
$\dots$	$\dots$

Numero atteso di superstiti in una tavola di mortalità

1. probabilità per un neonato (età 0) di decedere tra le età 65 e 66
$$ {}_{65|1}q_0 = \frac{\ell_{65} - \ell_{66}}{\ell_0} = 0.004 $$
2. probabilità per una persona di età 43 di essere in vita ad età 65
$$ {}_{22}p_{43} = \frac{\ell_{65}}{\ell_{43}} = 0.87046 $$
3. probabilità per una persona di età 40 di decedere tra le età 42 e 45
$$ {}_{2|3}q_{40} = \frac{\ell_{42} - \ell_{45}}{\ell_{40}} = 0.00592 $$
4. probabilità per una persona di età 42 di decedere tra le età 42 e 45
$$ {}_{3}q_{42} = \frac{\ell_{42} - \ell_{45}}{\ell_{42}} = 0.00593 $$

Esempio 2

Probabilità 1 e 2 nell'esempio precedente coinvolgono lunghi intervalli di tempo (65 anni di differimento nella probabilità 1, e 22 anni nella probabilità 2). Se le ℓ_x provengono da una tavola di periodo, tali probabilità (pure formalmente corrette) possono essere errate in presenza di un trend di mortalità

Le altre due probabilità coinvolgono intervalli brevi, e quindi possono essere ragionevolmente accettate. Un uso appropriato di una tavola di periodo dovrebbe essere limitato ad intervalli brevi, ad es. 10 anni al massimo

Per es., riferimento ad un assicurato di età 40 alla stipulazione del contratto; le seguenti probabilità possono essere usate per un'assicurazione temporanea di 5 anni:

$$ {}_1q_{40} = \frac{\ell_{40} - \ell_{41}}{\ell_{40}}, \ {}_{1|1}q_{40} = \frac{\ell_{41} - \ell_{42}}{\ell_{40}}, \ \ldots, \ {}_{4|1}q_{40} = \frac{\ell_{44} - \ell_{45}}{\ell_{40}} $$

LA DURATA ALEATORIA DI VITA

Definizioni:

T_x = *durata aleatoria di vita residua* per una persona di età x

$T_x + x$ = *età aleatoria al decesso* per una persona di età x

Esempi di probabilità relative a T_x:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[T_x > h] &= {}_h p_x \\ \mathbb{P}[T_x \leq h] &= {}_h q_x \\ \mathbb{P}[h-1 < T_x \leq h] &= {}_{h-1|1} q_x\end{aligned}$$

In particolare:

T_0 = durata aleatoria di vita alla nascita

Definizione:

K_x = *durata aleatoria troncata di vita residua* di una persona di età x
= parte intera di T_x

$$\begin{array}{ccc} 0 < T_x < 1 & \Leftrightarrow & K_x = 0 \\ 1 \le T_x < 2 & \Leftrightarrow & K_x = 1 \\ 2 \le T_x < 3 & \Leftrightarrow & K_x = 2 \\ \dots & & \dots \end{array}$$

In particolare: K_0 = durata aleatoria troncata di vita alla nascita

Distribuzione di probabilità di K_0:

$$_{0|1}q_0,\ _{1|1}q_0, \dots, {}_{x|1}q_0, \dots$$

con

$$_{x|1}q_0 = \frac{d_x}{\ell_0}$$

3.3 UNA "LEGGE" DI MORTALITÀ

Uso di "leggi" di mortalità: mortalità in funzione dell'età riassunta da parametri (in pratica: da 2 a 10) $\Rightarrow$ 110 (o più) elementi di una tavola sostituiti da un piccolo insieme di parametri (*perequazione parametrica*)

Legge di Heligman-Pollard (1980)

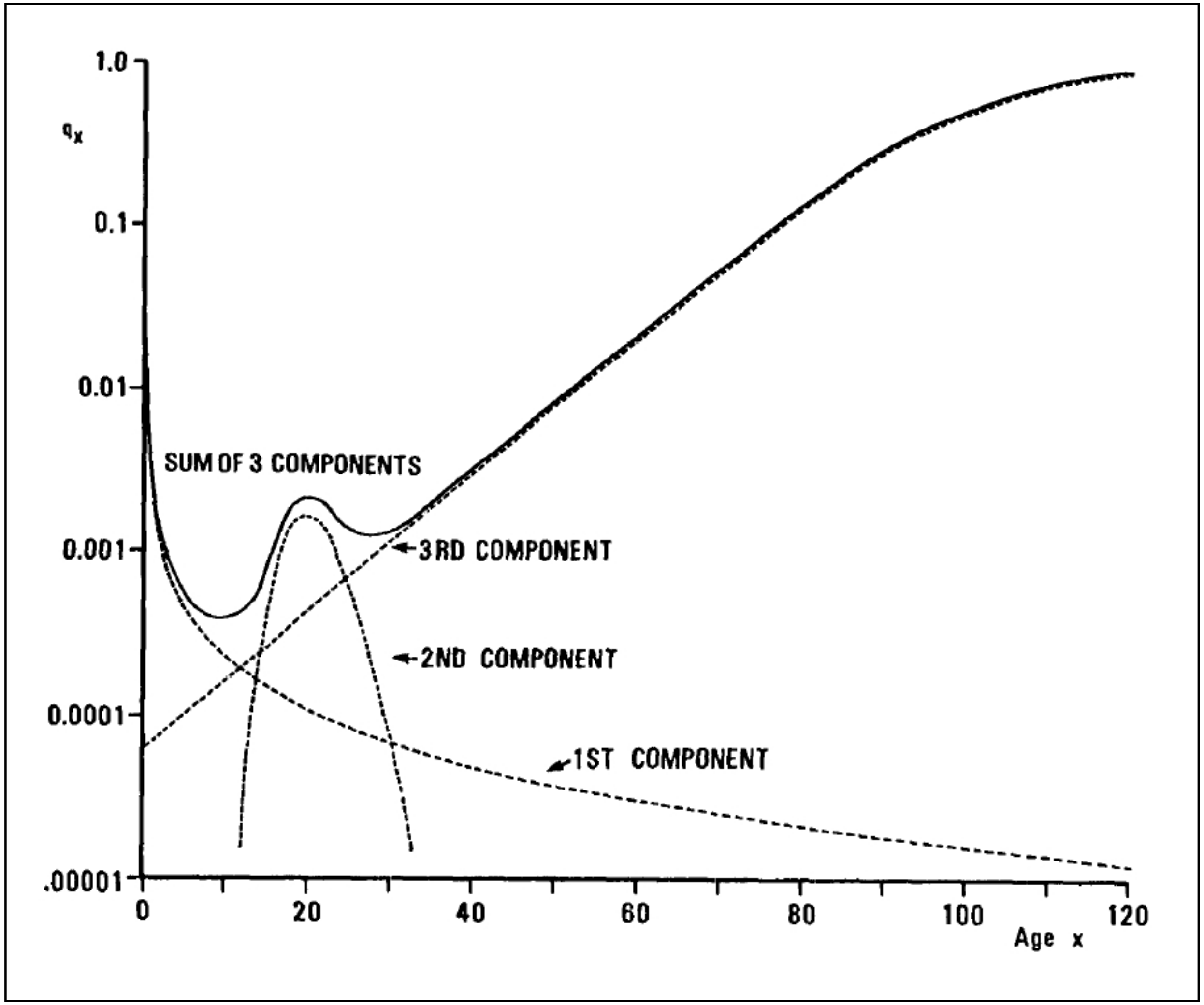
Prima legge di Heligman-Pollard:

$$\frac{q_x}{1-q_x} = \underbrace{A^{(x+B)^C}}_{\text{mortalità infantile}} + \underbrace{D\,\mathrm{e}^{-E(\ln x - \ln F)^2}}_{\text{mortalità giovanile (accidentale)}} + \underbrace{G\,H^x}_{\text{mortalità adulta e senile}}$$

Ad età medie ed elevate:

$$q_x \approx \frac{G\,H^x}{1+G\,H^x}$$

Altre leggi di Heligman-Pollard con ulteriori parametri



Componenti della legge di Heligman-Pollard

(Da: L. Heligman e J. H. Pollard (1980), The age pattern of mortality, JIA, ***107****, 49-80)*

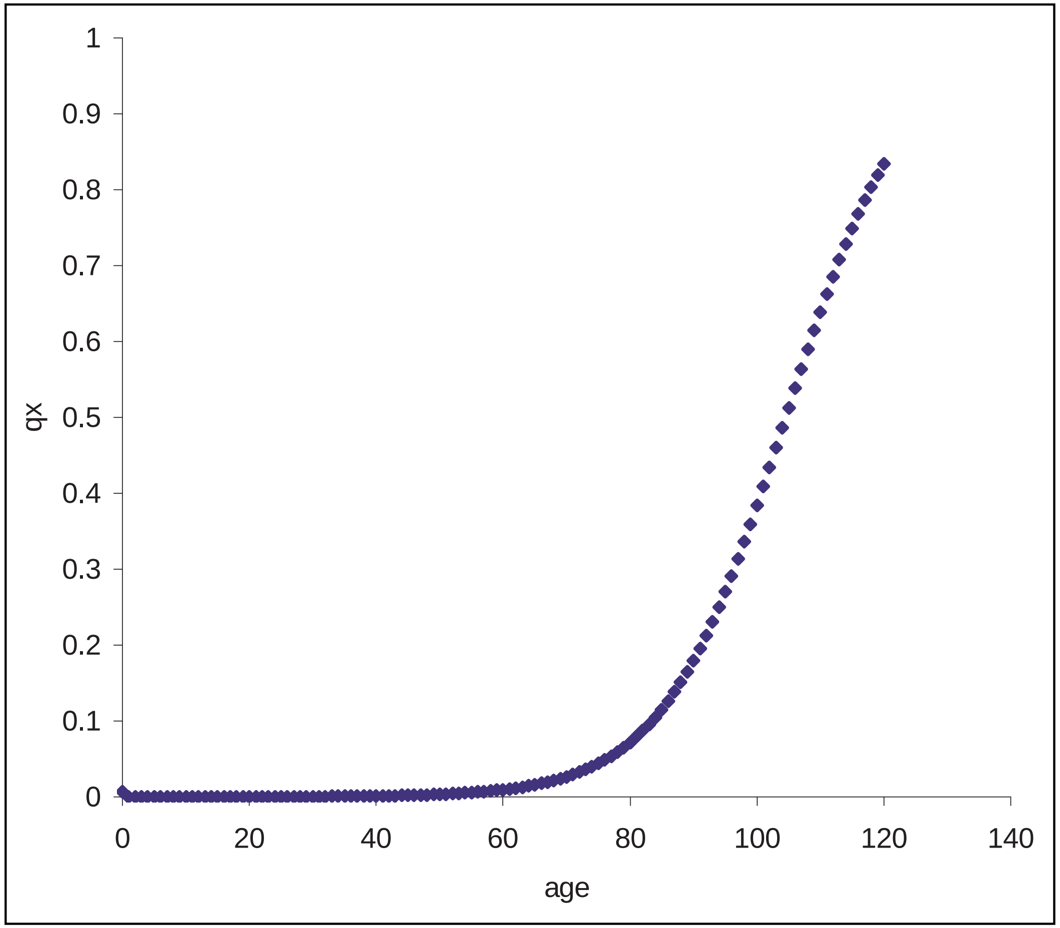
Esempio

Parametri:

$$
\begin{aligned}
A &= 0.000544 & \qquad B &= 0.017 \\
C &= 0.101 & \qquad D &= 0.000158 \\
E &= 10.72 & \qquad F &= 18.67 \\
G &= 0.0000183 & \qquad H &= 1.11
\end{aligned}
$$

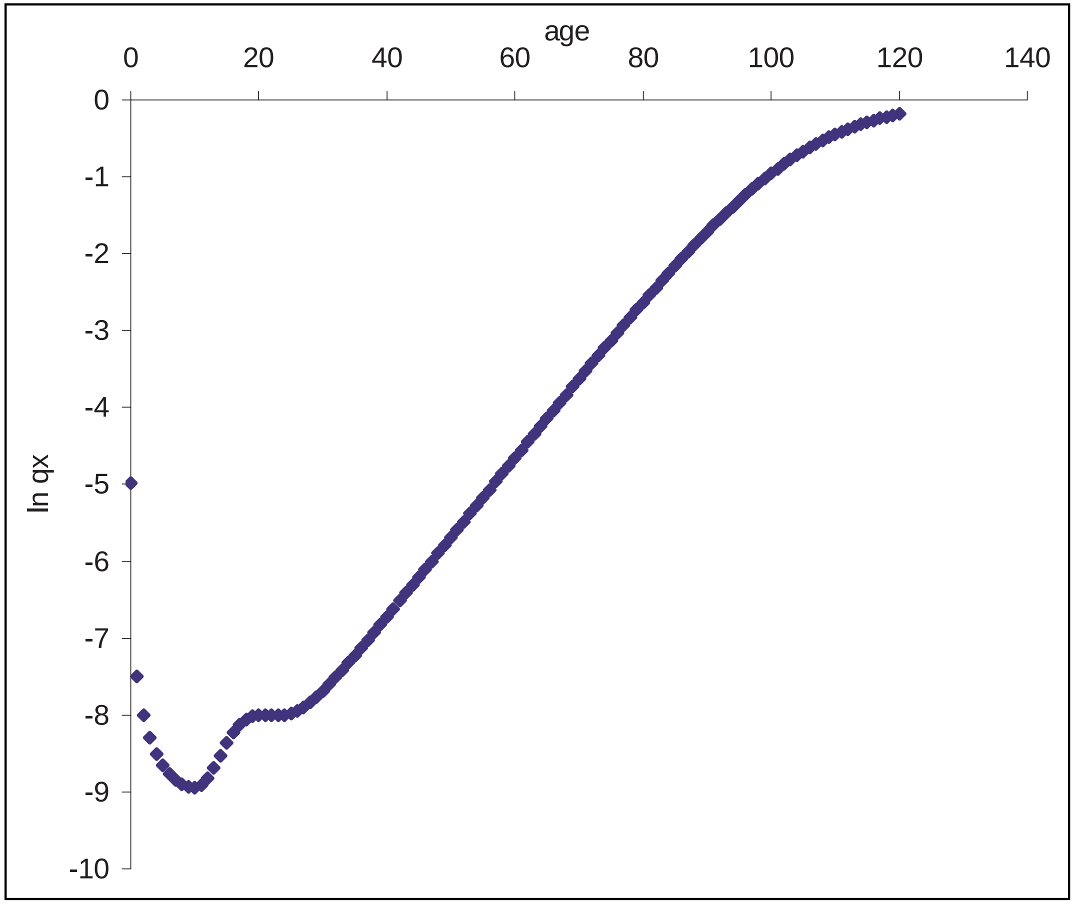
Vedi Figure

Una “legge” di mortalità *(cont.)*



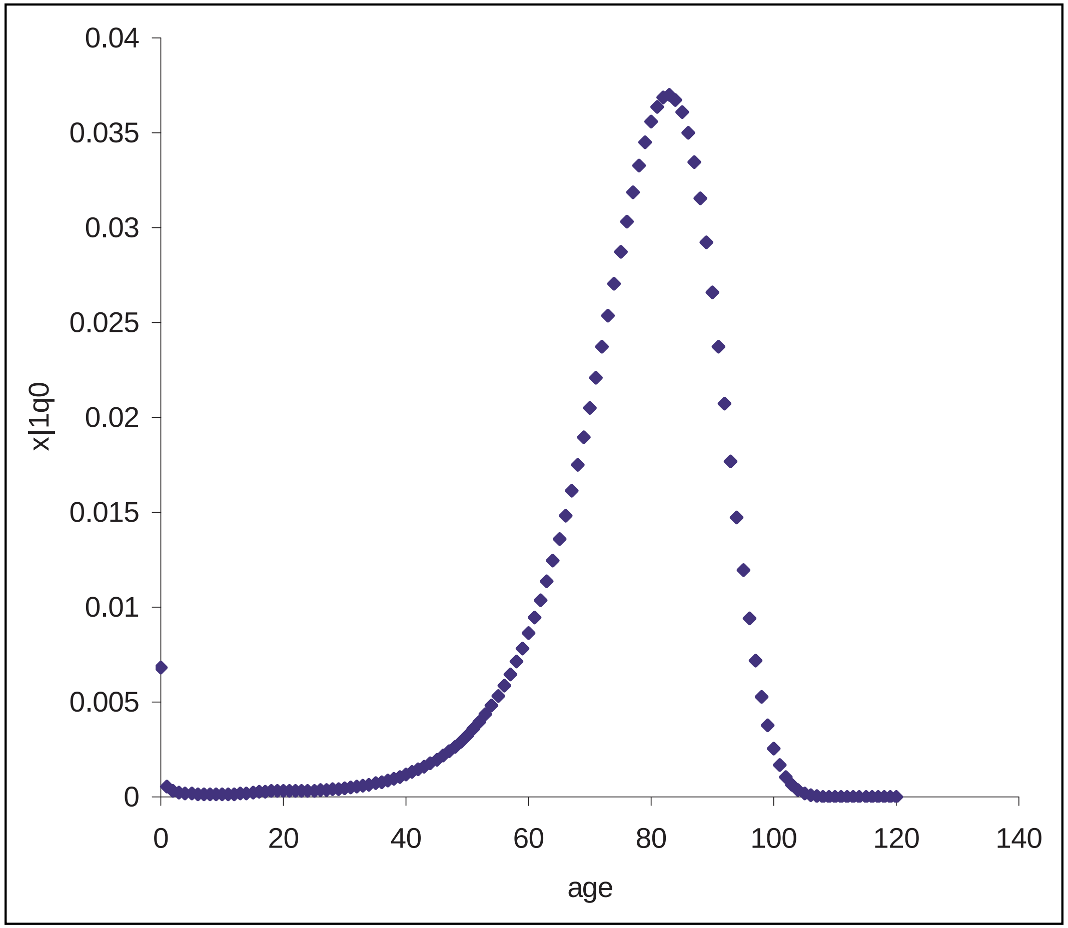
La prima legge di Heligman-Pollard: q_x

Una “legge” di mortalità *(cont.)*



La prima legge di Heligman-Pollard: $\ln q_x$

Una “legge” di mortalità *(cont.)*



La prima legge di Heligman-Pollard: ${}_{x|1}q_0$

3.4 VALORI SINTETICI

VITA ATTESA

Vita attesa (o *speranza di vita*) alla nascita:

$$\mathring{e}_0 = \frac{1}{2}\,{}_{0|1}q_0 + \left(1 + \frac{1}{2}\right){}_{1|1}q_0 + \cdots + \left(x + \frac{1}{2}\right){}_{x|1}q_0 + \ldots$$

= valore atteso della distrib. di prob. di $K_0 + \frac{1}{2}$,
cioè $\mathbb{E}\left[K_0 + \frac{1}{2}\right]$

Vita attesa residua (o *speranza di vita residua*) ad età x:

$$\mathring{e}_x = \frac{1}{2}\,{}_{0|1}q_x + \left(1 + \frac{1}{2}\right){}_{1|1}q_x + \ldots$$

= valore atteso della distrib. di prob. di $K_x + \frac{1}{2}$,
cioè $\mathbb{E}\left[K_x + \frac{1}{2}\right]$

Vita attesa totale ad età x:

$$x + \overset{\circ}{e}_x = x + \mathbb{E}\left[K_x + \tfrac{1}{2}\right]$$

Si può dimostrare che:

$$1 + \overset{\circ}{e}_x > \overset{\circ}{e}_{x-1}$$

Interpretazione: aumento dovuto al "superamento" della mortalità tra età esatte $x - 1$ e x

Seguono in particolare:

$x + \overset{\circ}{e}_x > x - 1 + \overset{\circ}{e}_{x-1}$ ($\Rightarrow$ vita totale attesa funzione crescente con x)

$x + \overset{\circ}{e}_x > \overset{\circ}{e}_0$ per ogni $x > 0$

Vedi Esempio 1

Esempio 1

Ipotesi: mortalità secondo Heligman-Pollard; parametri: vedi esempio precedente

x	$\mathring{e}_x$	$x + \mathring{e}_x$
0	76.782	76.782
1	76.311	77.311
2	75.353	77.353
...	...	...
40	38.101	78.101
41	37.147	78.147
42	36.197	78.197
...	...	...
70	12.699	82.699
71	12.045	83.045
72	11.409	83.409
...	...	...

Vita attesa

Esempio 2

Obiettivo: analizzare la variazione della vita attesa al variare dell'ipotesi di mortalità (per es. dovuta a riduzione della mortalità) rispetto alla mortalità "base" q_x (vedi Esempi prec.)

Siano:

$$q_x^{(\alpha)} = (1-\alpha)\, q_x \qquad (0 < \alpha < 1)$$

$$\overset{\circ}{e}{}_x^{(\alpha)} = \text{vita attesa corrispondente alla mortalità } q_x^{(\alpha)}$$

	$\overset{\circ}{e}{}_x^{(\alpha)} - \overset{\circ}{e}_x$				
x	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.15$	$\alpha = 0.20$	$\alpha = 0.25$
0	0.553	1.136	1.753	2.407	3.104
40	0.498	1.025	1.585	2.183	2.822
70	0.359	0.744	1.157	1.603	2.087

Aumento della vita attesa in funzione della diminuzione della mortalità

Esempio 3

Popolazione A: $\overset{\circ}{e}_0^{[A]}$

Popolazione B: $\overset{\circ}{e}_0^{[B]}$

Si supponga: $\overset{\circ}{e}_0^{[A]} = 76$, $\overset{\circ}{e}_0^{[B]} = 78$

Interpretazione della differenza $\overset{\circ}{e}_0^{[B]} - \overset{\circ}{e}_0^{[A]} = 2$

Si consideri l'affermazione: "La maggiore vita attesa implica che il costo per il pagamento della pensione ad un generico individuo della popolazione B è maggiore del costo relativo ad un individuo della popolazione A, in quanto un individuo in B riceve in media due rate annuali in più"

L'affermazione può essere errata, perché $\overset{\circ}{e}_0$ dipende da tutta la distribuzione di probabilità di K_0, inclusa la mortalità infantile e giovanile

Il valore maggiore di $\overset{\circ}{e}_0^{[\mathrm{B}]}$ può essere spiegato in particolare in termini di:

1. minore mortalità infantile
2. minore mortalità giovanile
3. maggiore vita attesa residua, per esempio ad età 50

Gli aspetti 1 e 2 non spiegano la disuguaglianza tra i costi delle pensioni. L' aspetto 3 può spiegarla

Informazioni utili fornite dal punto di Lexis (vedi più avanti) e da vita attesa residua ad età adulte o anziane, ad es. 50 o 65

Se risulta anche $\overset{\circ}{e}_{65}^{[\mathrm{B}]} > \overset{\circ}{e}_{65}^{[\mathrm{A}]}$, allora si può affermare che i costi per il pagamento delle pensioni alla popolazione B sono maggiori dei costi relativi alla popolazione A

Altri valori sintetici

Punto di Lexis: età (anziana) x tale che d_x ha il suo massimo valore = moda della distribuzione di probabilità di K_0

Varianza della distribuzione di probabilità della durata aleatoria di vita (o il suo *scarto quadratico medio*): tradizionale misura di variabilità

Misure di mortalità infantile: probabilità ${}_{\bar{x}}q_0$ che un neonato deceda prima di una data età $\bar{x}$, per $\bar{x}$ piccolo (es. 1, o 5)

Endurance: età ξ alla quale 90% degli ℓ_0 individui è in vita, cioè ${}_{\xi}p_0 = 0.90$

Range interquartile:

$$\mathrm{IQR} = x'' - x'$$

con x' = 1° quartile (25° percentile), x'' = 3° quartile (75° percentile): misura di variabilità

Vedi anche: MODELLI A TEMPO CONTINUO

3.5 DAL MODELLO BASE A MODELLI PIÙ GENERALI

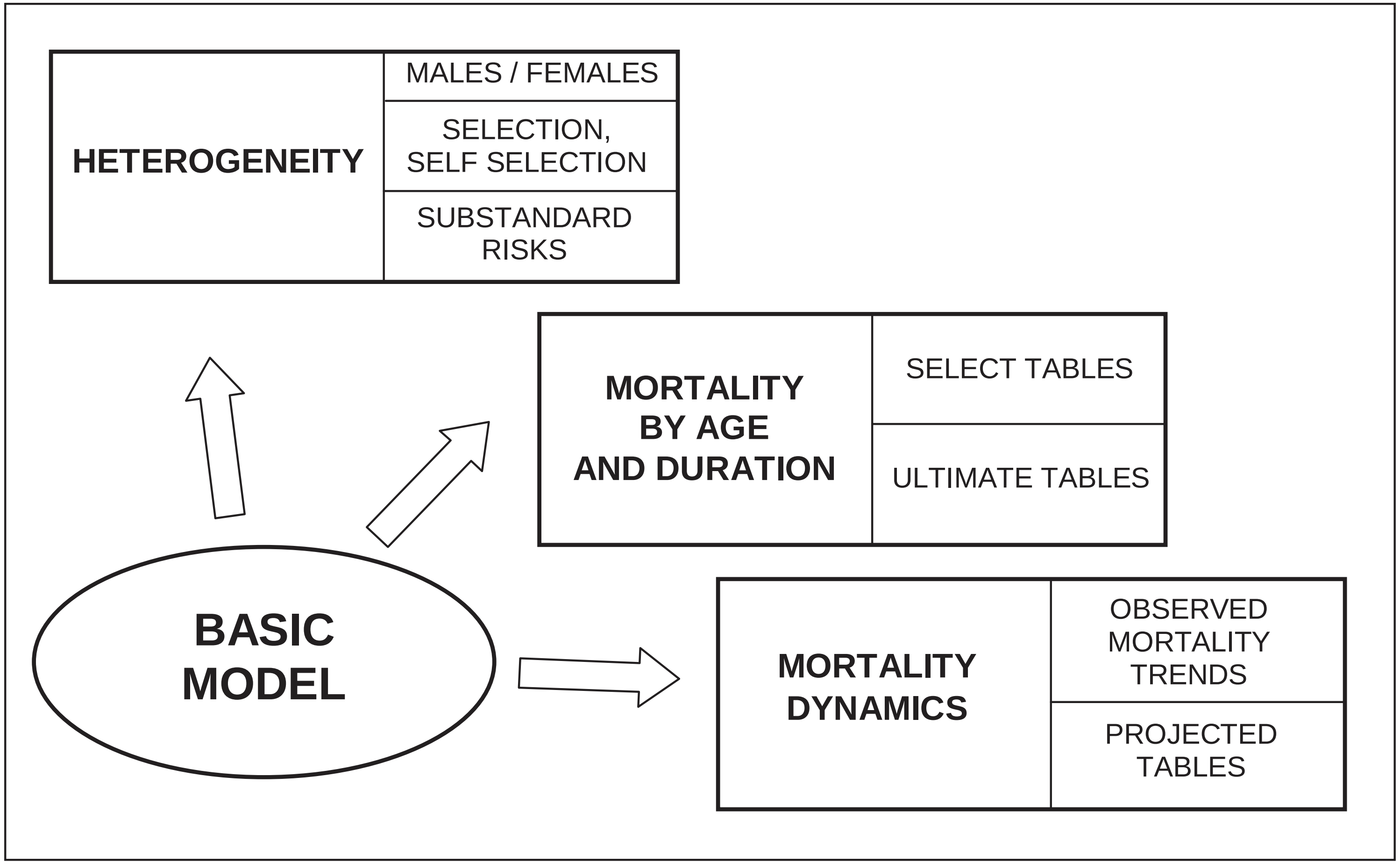
Modello di mortalità usato finora: modello “base”, in quanto probabilità di decesso e sopravvivenza sono considerate dipendenti solo dall’età raggiunta

Esperienza statistica $\Rightarrow$ necessari anche modelli più complessi, che considerano:

- eterogeneità (all’interno di una popolazione) in relazione alla mortalità, anche a parità di età raggiunta
- futuri trend di mortalità
- effetto della selezione medica nell’accettazione di un rischio
- ...

Vedi Figura: principali direzioni da seguire, per costruire modelli più generali da usare in calcoli relativi ad assicurazioni vita (e fondi pensione)

Dal modello base a modelli più generali *(cont.)*



Modelli di mortalità nella tecnica delle assicurazioni vita

3.6 ETEROGENEITÀ

ALCUNE IDEE PRELIMINARI

Fattori di eterogeneità

- osservabili
- non osservabili ($\Rightarrow$ "frailty" individuale)

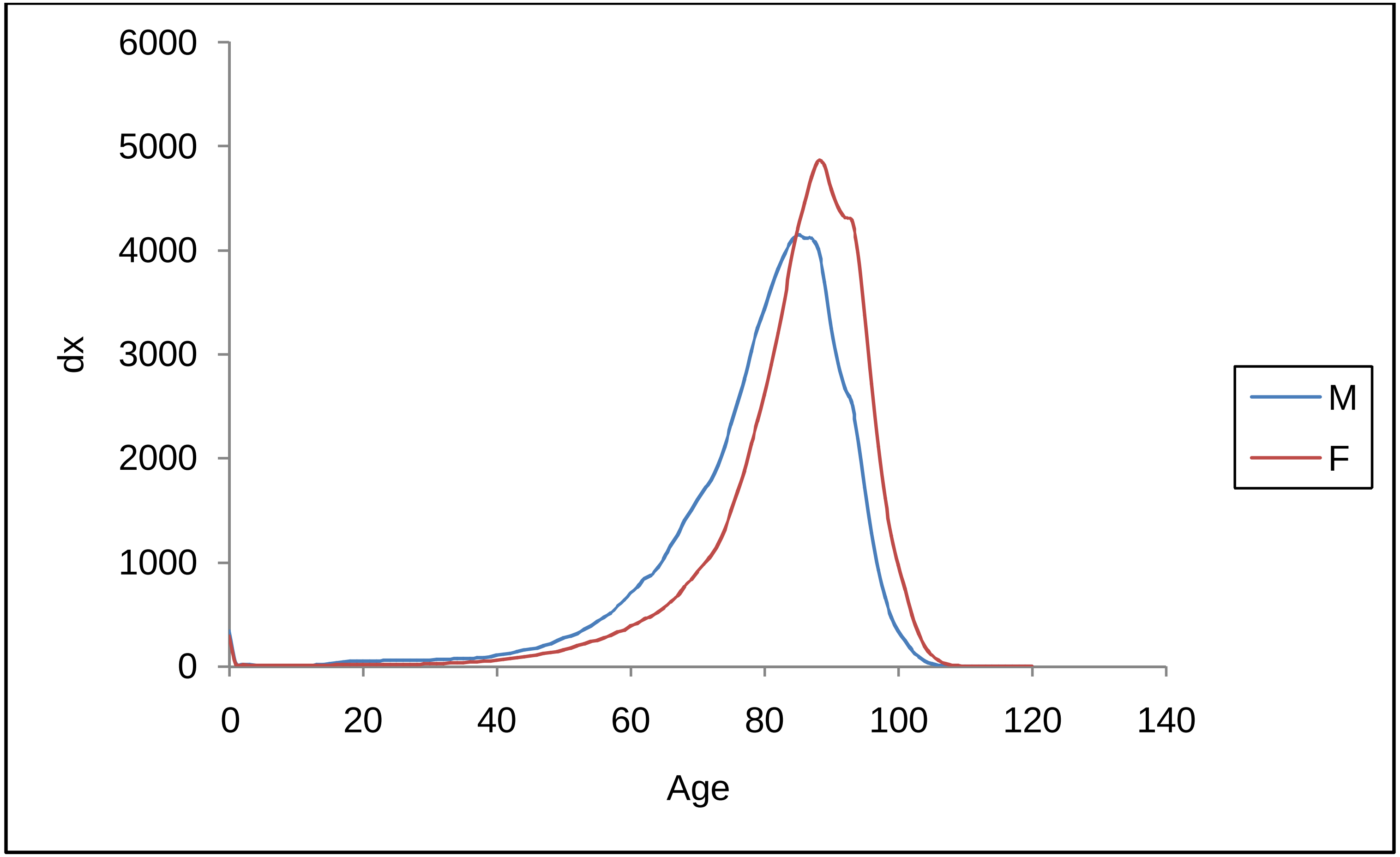
Fattori di eterogeneità osservabili $\Rightarrow$ *fattori di rischio* in assicurazione vita

Varie classificazioni. Per esempio:

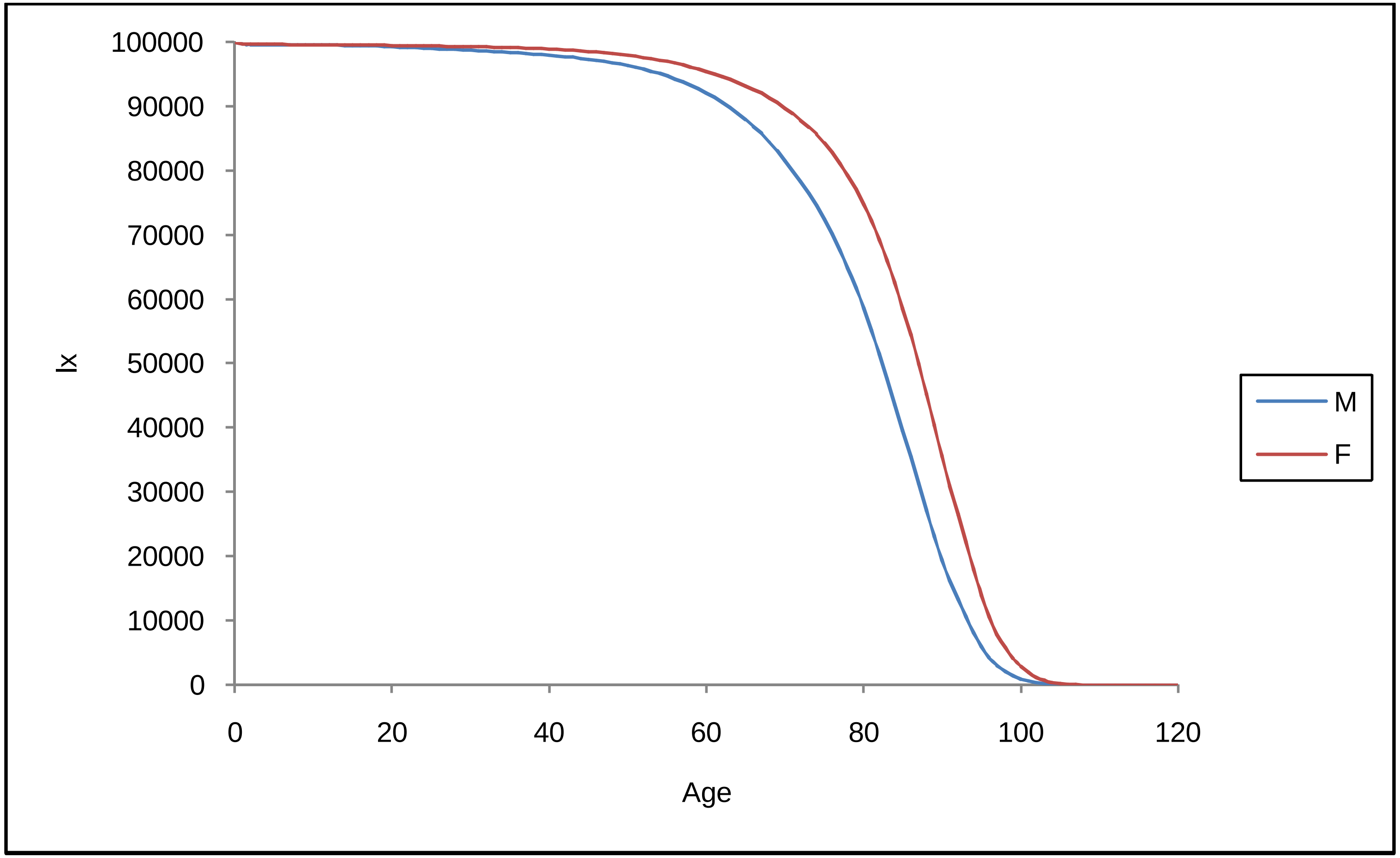
- fattori *normali*: età, sesso
- fattori *biologici*: di natura fisiologica o patologica, relativi a alimentazione, fumo, alcol, ecc.
- fattori *occupazionali*: professione, sport, ecc.
- fattori *ambientali*: relativi a condizioni sociali ed economiche, clima, inquinamento, ecc.

Fattori di rischio $\Rightarrow$ *classi di rischio*

Eterogeneità *(cont.)*



Curve dei decessi nella popol. italiana femminile e maschile - 2011 (fonte: ISTAT)



Curve di sopravvivenza nella popol. italiana femminile e maschile - 2011 (fonte: ISTAT)

CLASSI DI PREMIO

Definite da criteri usualmente adottati nelle assicurazioni vita

Fattori di premio comuni (in funzione anche del tipo di prodotto assicurativo):

- età
- sesso (nella Unione Europea escluso da dicembre 2012)
- condizioni di salute (accertamento medico)
- rischi professionali
- fumo

Rischio classificato come

- *rischio normale*, se non si ravvisa alcun aggravamento di mortalità dovuto a condizioni di salute o rischi professionali
- *rischio aggravato* altrimenti

RISCHI AGGRAVATI

Rappresentazione della mortalità per rischi aggravati:

- uso di tavole "speciali", basate sull'osservazione della mortalità tra rischi aggravati (o in una "classe" di rischi aggravati)
  - difficoltà di implementazione a causa di scarsità di dati
  - adottato ad es. per la mortalità di invalidi
- uso di una tavola "normale" (o di una legge di mortalità normale), "modificata" per rappresentare una mortalità maggiore

$$q_x^{[\mathrm{mod}]} = \Phi(q_x)$$

  - più comune ed affidabile
  - dati richiesti per la sola scelta della Φ e stima dei parametri
  - vari modelli disponibili

Siano x l'età alla stipulazione del contratto, m la scadenza del contratto, q_{x+t} $(0 \leq t \leq m-1)$ la probabilità "normale" di decesso

Modello lineare

$$q^{[L]}_{x+t} \;=\; (1+\beta)\, q_{x+t} + \alpha; \;\; 0 \leq t \leq m-1$$

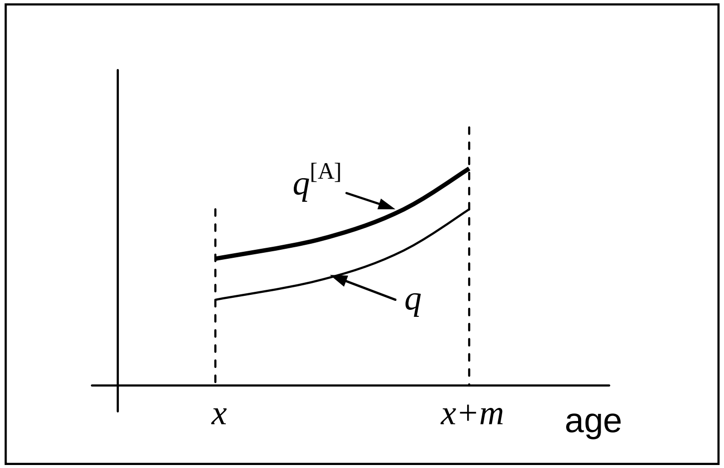
In particolare:

modello additivo ($\Rightarrow$ aggravamento costante)

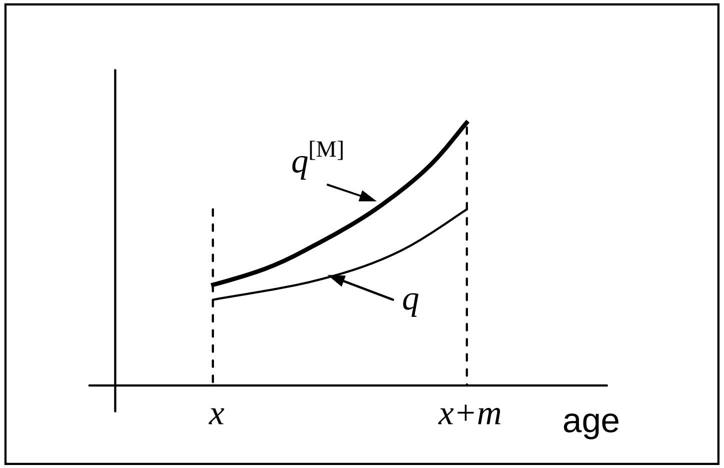
$$q^{[A]}_{x+t} \;=\; q_{x+t} + \alpha; \;\; 0 \leq t \leq m-1$$

modello moltiplicativo ($\Rightarrow$ aggravamento crescente)

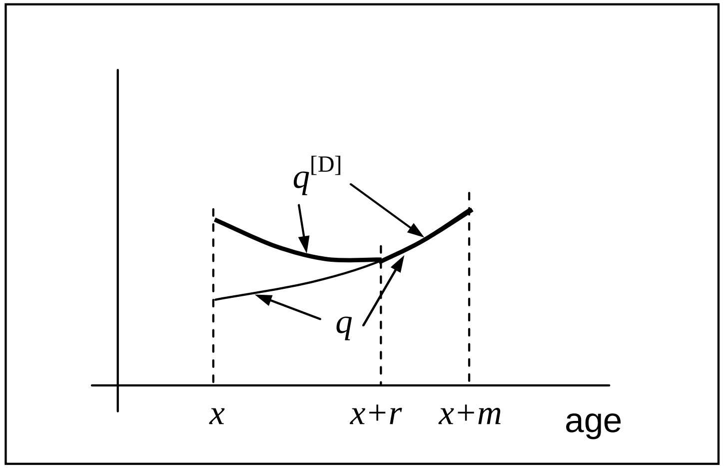
$$q^{[M]}_{x+t} \;=\; (1+\beta)\, q_{x+t}; \;\; 0 \leq t \leq m-1$$



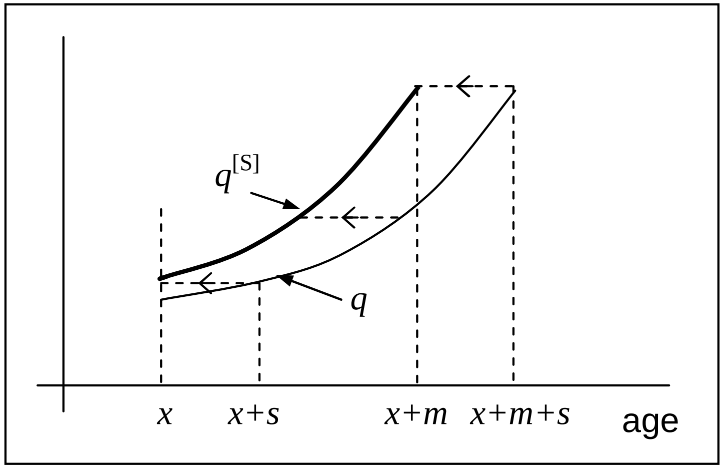
Modello additivo



Modello moltiplicativo



Aggravamento decrescente



Aggiustamento d'età

Aggravamento decrescente

$$q_{x+t}^{[\mathrm{D}]} = \begin{cases} (1+\beta)\, q_{x+t} + \alpha; & 0 \le t \le r-1 \\ q_{x+t}; & r \le t \le m-1 \end{cases}$$

con $0 < r < m-1$; α, β tali che

$$\begin{aligned} (1+\beta)\, q_x + \alpha &= q_x + \text{aggravamento iniziale} \\ (1+\beta)\, q_{x+r} + \alpha &= q_{x+r} \end{aligned}$$

Modello con *aggiustamento d'età*, come approssimazione del modello moltiplicativo: mortalità dei rischi aggravati assunta uguale alla mortalità dei rischi normali di età più elevata

$$q_{x+t}^{[\mathrm{S}]} = q_{x+t+s}; \quad 0 \le t \le m-1$$

Osservazione

In pratica, aggravamento (in particolare moltiplicativo) frequentemente espresso direttamente in termini di incremento del premio (unico)

Premio unico della temporanea caso morte non aggravato Π:

$$\Pi = C\left((1+i)^{-1}\,{}_{0|1}q_x + (1+i)^{-2}\,{}_{1|1}q_x + \dots + (1+i)^{-m}\,{}_{m-1|1}q_x\right)$$

Risulta:

$${}_{t|1}q_x = {}_tp_x\, q_{x+t}$$

Si assuma:

$${}_tp_x \approx 1 \quad \Rightarrow \quad {}_{t|1}q_x \approx q_{x+t}$$

Premio con aggravamento moltiplicativo, $\Pi^{[\mathrm{M}]}$, definito come segue:

$$\Pi^{[\mathrm{M}]} = C\left((1+i)^{-1}(1+\beta)\,q_x + (1+i)^{-2}(1+\beta)\,q_{x+1} + \dots + (1+i)^{-m}(1+\beta)\,q_{x+m-1}\right) \approx (1+\beta)\,\Pi$$

LA “FACTOR FORMULA”

Modello moltiplicativo usato non solo per rappresentare mortalità maggiore della standard: ponendo $-1 < \beta < 0$, si esprime una mortalità minore

Il modello può essere usato per rappresentare una mortalità individuale “specifica” in funzione della mortalità standard q_{x+t}

Esempio: il cosiddetto *numerical rating system*, introdotto nel 1919 dalla New York Life Insurance e tuttora adottato da numerosi assicuratori

- Insieme di r fattori di premio; probabilità annuale specifica di decesso di un individuo di età $x+t$, $q_{x+t}^{[\mathrm{spec}]}$, espressa dalla *factor formula*:

$$q_{x+t}^{[\mathrm{spec}]} = q_{x+t}\left(1 + \sum_{h=1}^{r} \gamma_h\right)$$

- Parametri γ_h determinano probabilità individuale specifica, maggiore o minore in funzione dei valori assunti dai fattori di premio
- Ipotesi:
  - ▷ effetto additivo dei vari fattori ($\Rightarrow$ possibili "compensazioni")
  - ▷ fattori tra loro indipendenti

3.7 MORTALITÀ PER ETÀ ED ANTIDURATA

ALCUNE IDEE PRELIMINARI

Probabilità di decesso (in una data classe di rischio definita da età, sesso, ecc): dipendente solo dall'età raggiunta ?

Esempio

Gruppo di assicurati di 50 anni; è q_{50} "ragionevole" per tutti ?

Accertamento medico alla stipulazione del contratto
$\Rightarrow$ differenziazione tra assicurati di età 50 con contratto appena stipulato, stipulato da 1 anno, . . . , da 5 anni, . . . (sebbene con identico esito al momento di accertamento)

Probabilità:

$$q_{[50]+0}, q_{[49]+1}, \dots, q_{[45]+5}, \dots$$

Relazioni:

$$q_{[50]+0} < q_{[49]+1} < \dots < q_{[45]+5} < \dots = \bar{q}_{50}$$

TAVOLE SELEZIONATE

Probabilità di decesso ad età $x+t$ dipendente dall'età alla stipulazione del contratto x e dal tempo trascorso dalla stipulazione (*antidurata*) t: $q_{[x]+t}$

Tavola di mortalità selezionata: per $x = x_{\min}, \dots, x_{\max}$

$$\underbrace{q_{[x]}, q_{[x]+1}, \dots, q_{[x]+r-1}}_{\text{prob. “selezionate”}},\ \underbrace{\bar{q}_{x+r}, \bar{q}_{x+r+1}, \dots}_{\text{prob. “aggregate”}}$$

con r termine del periodo di selezione (usualmente, $5 \le r \le 10$)

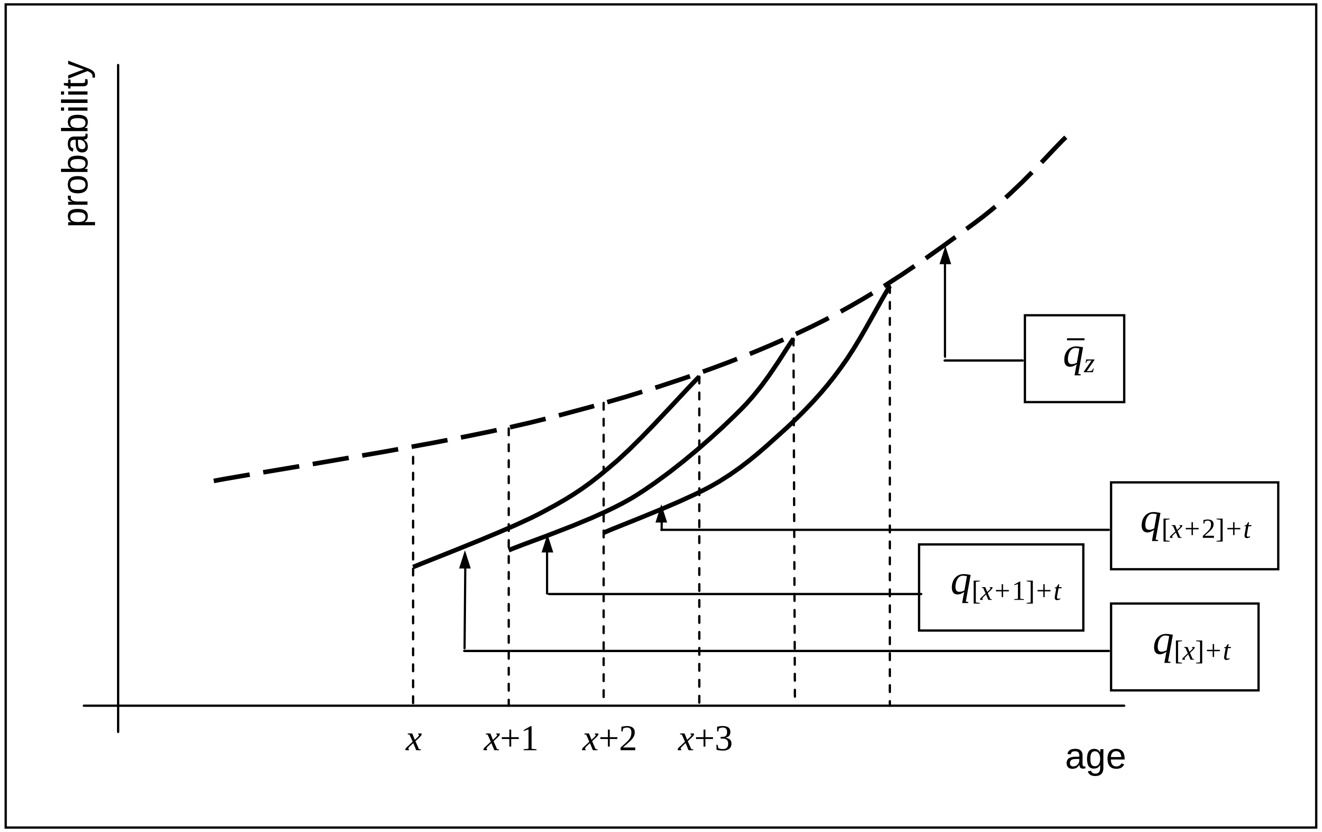
Modello impiegabile anche per rendite vitalizie (“autoselezione”)

Mortalità per età ed antidurata *(cont.)*

Probabilità monoannuali di decesso					
età ingr.	selezionate				aggregate
	$t=0$	$t=1$	$\dots$	$t=r-1$	$t \geq r$
$x_{\min}$	$q_{[x_{\min}]}$	$q_{[x_{\min}]+1}$	$\dots$	$q_{[x_{\min}]+r-1}$	$\bar{q}_{x_{\min}+r}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$x-1$	$q_{[x-1]}$	$q_{[x-1]+1}$	$\dots$	$q_{[x-1]+r-1}$	$\bar{q}_{x+r-1}$
x	$q_{[x]}$	$q_{[x]+1}$	$\dots$	$q_{[x]+r-1}$	$\bar{q}_{x+r}$
$x+1$	$q_{[x+1]}$	$q_{[x+1]+1}$	$\dots$	$q_{[x+1]+r-1}$	$\bar{q}_{x+r+1}$
$x+2$	$q_{[x+2]}$	$q_{[x+2]+1}$	$\dots$	$q_{[x+2]+r-1}$	$\bar{q}_{x+r+2}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Tavola selezionata

Mortalità per età ed antidurata *(cont.)*



Probabilità "selezionate" e probabilità "aggregate" ($r = 3$)

UN ASPETTO PRATICO

Le probabilità selezionate $q_{[x]+t}$ dovrebbero essere stimate in base alla mortalità di assicurati classificati per antidurata

- suddivisione della popolazione assicurata in numerose “celle”, con pochi individui per cella
- scarsa affidabilità delle stime

In alternativa: stima della mortalità aggregata, non dipendente dall'antidurata, per antidurate maggiori del periodo di selezione
$\Rightarrow$ probabilità $\bar{q}_z$ (funzioni della sola età raggiunta z)

Rappresentazione dell'effetto selezione mediante fattori di riduzione

$$q_{[x]+t} = \bar{q}_{x+t}\,\rho(t); \quad \text{per } t = 0, 1, \ldots, r-1$$

dove $\rho(t)$ ($\rho(t) < 1$) dipende solo dall'antidurata t (o, almeno, può essere assunto indipendente dall'età x su ampie classi di età, ad es. da 20 a 40, da 41 a 60, ecc.)

3.8 DINAMICA DELLA MORTALITÀ. TAVOLE PROIETTATE

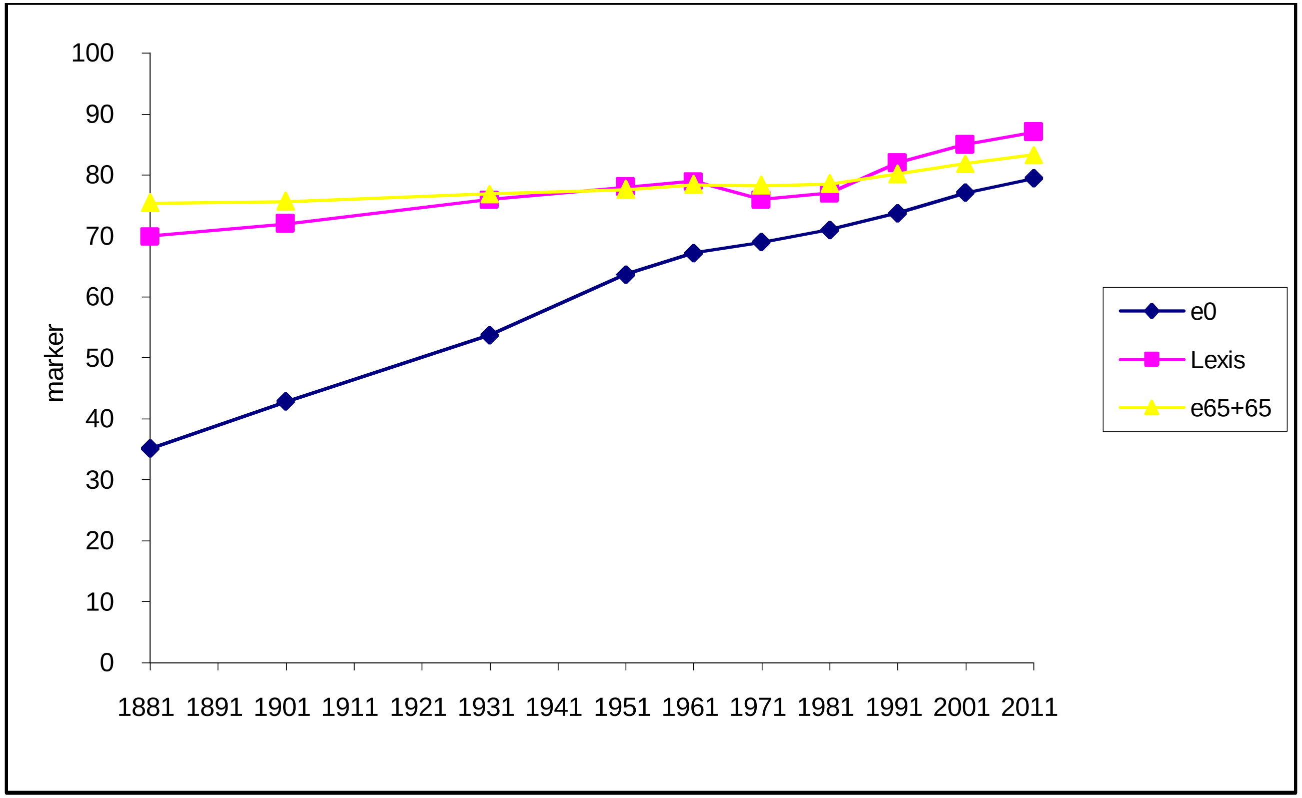
EVOLUZIONE DELLA MORTALITÀ

L'evoluzione della mortalità emerge confrontando tavole costruite in diversi periodi di osservazione (per lo stesso tipo di popolazione):

- aumento della vita attesa (sia alla nascita che ad età adulte ed anziane)
- generale riduzione delle probabilità di decesso
- spostamento del punto di Lexis verso età molto elevate
  $\Rightarrow$ *espansione* della curva di sopravvivenza (ℓ_x)
- concentrazione dei decessi attorno al punto di Lexis
  $\Rightarrow$ *rettangolarizzazione* della curva di sopravvivenza

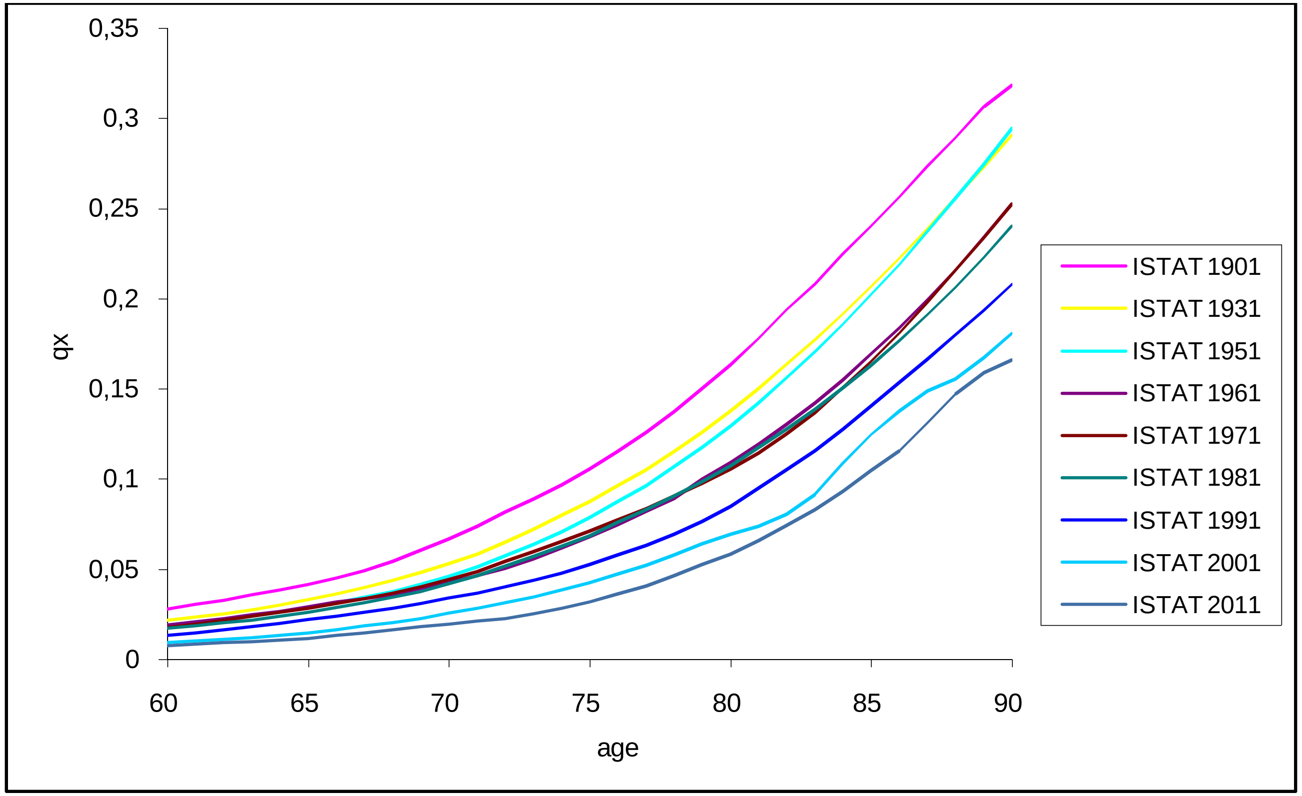
Vedi Figure seguenti (tavole ISTAT Maschi)

Dinamica della mortalità. Tavole proiettate *(cont.)*



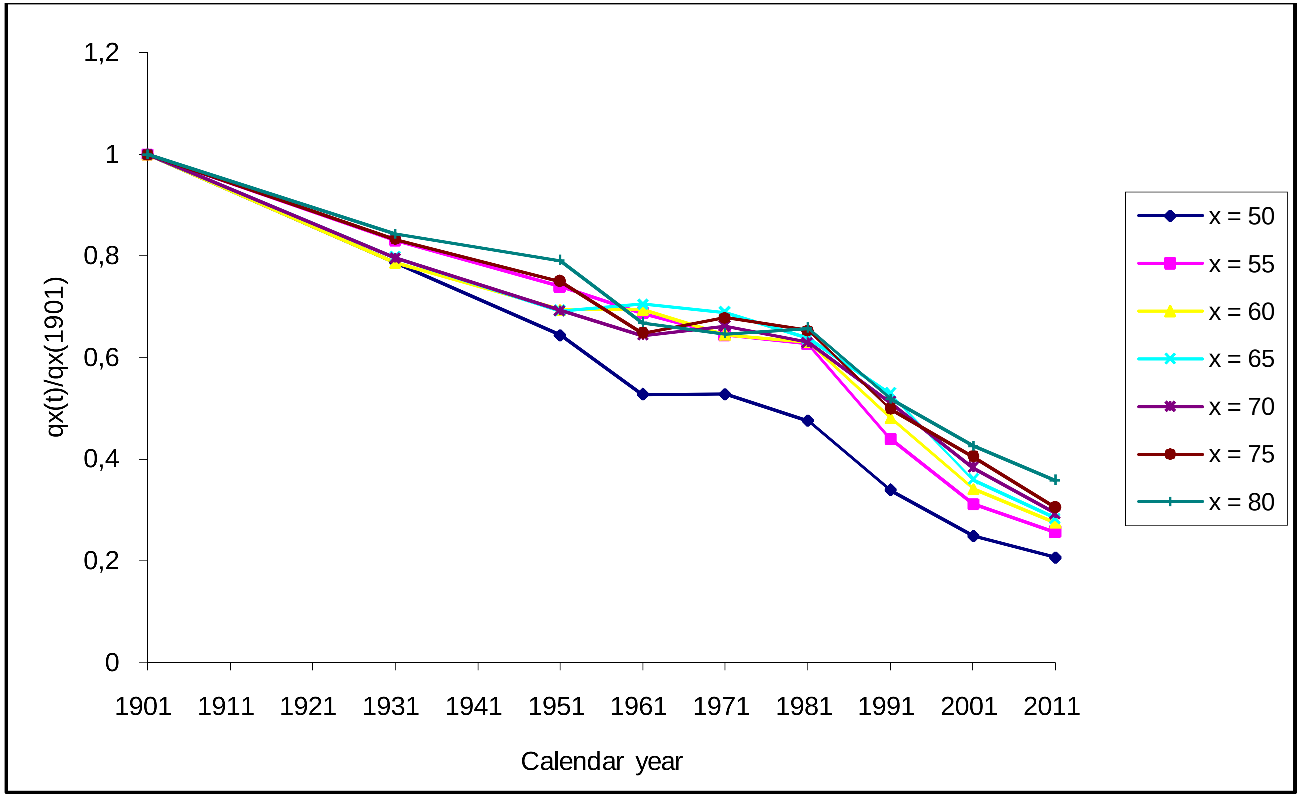
Vita attesa e punto di Lexis

Dinamica della mortalità. Tavole proiettate *(cont.)*



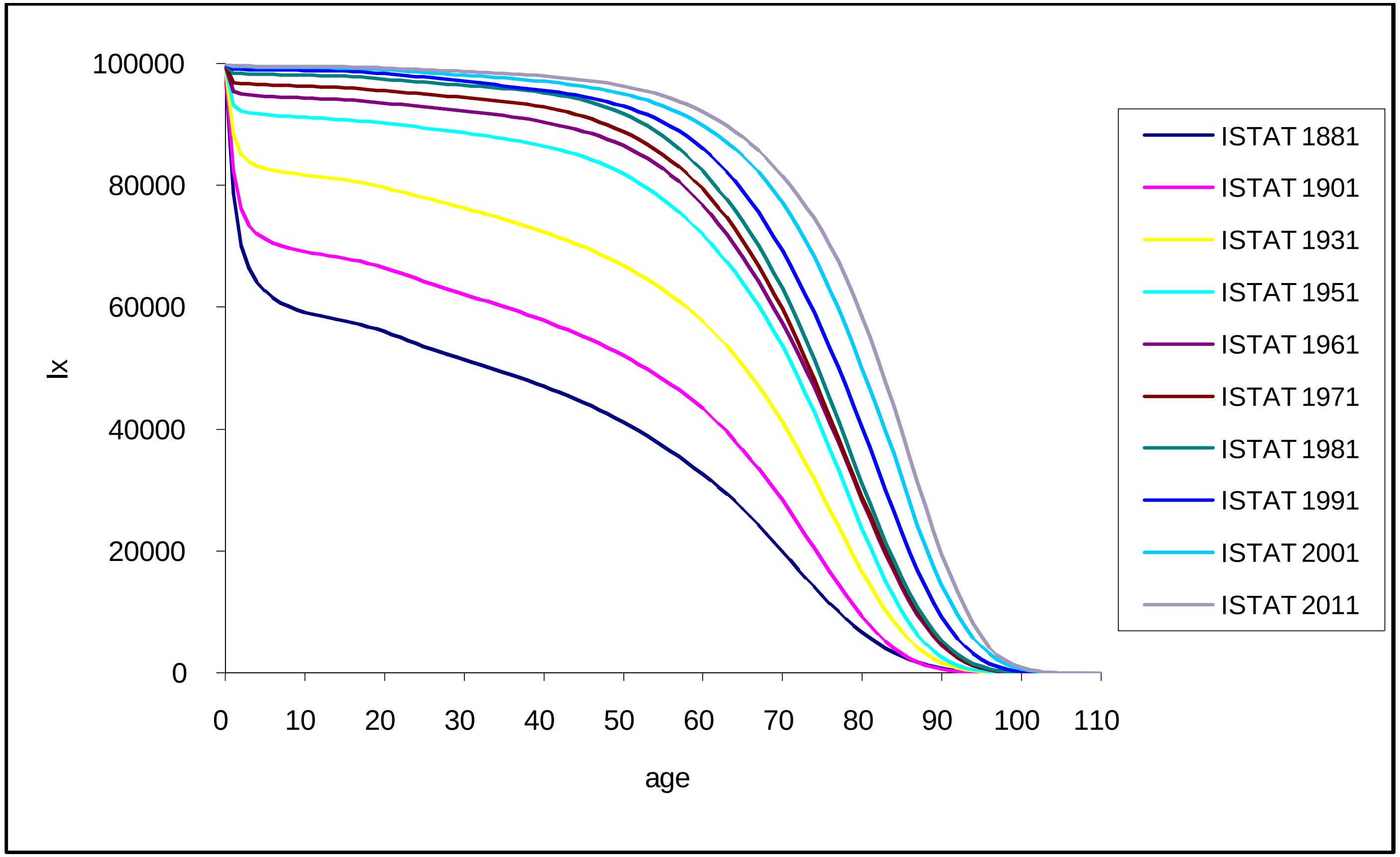
Probabilità monoannuali di decesso

Dinamica della mortalità. Tavole proiettate *(cont.)*



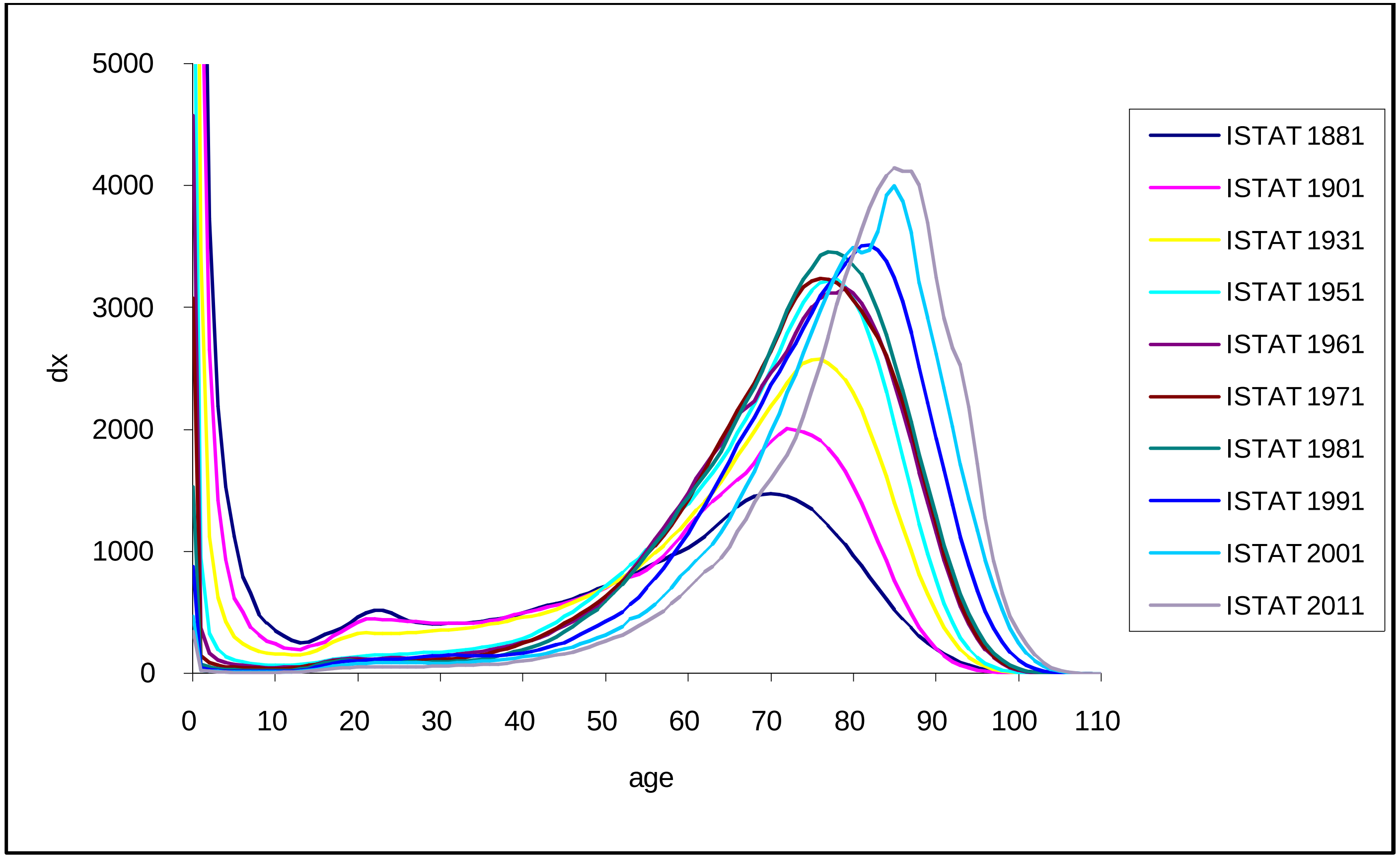
Profili temporali di mortalità

Dinamica della mortalità. Tavole proiettate *(cont.)*



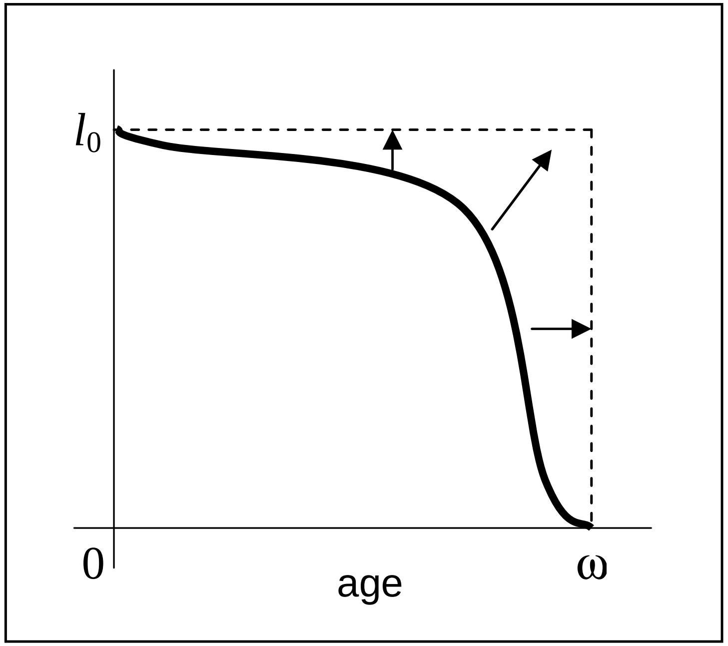
Curve di sopravvivenza

Dinamica della mortalità. Tavole proiettate *(cont.)*

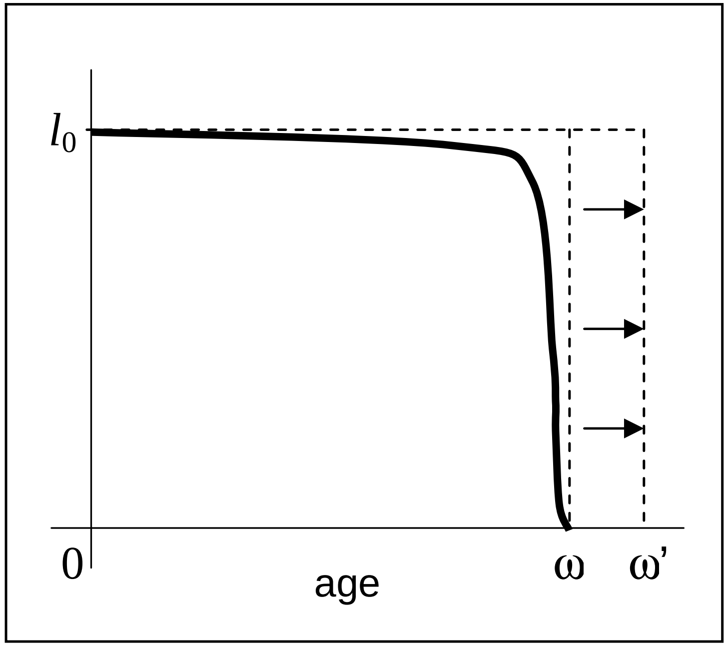


Curve dei decessi

Dinamica della mortalità. Tavole proiettate *(cont.)*



(a)



(b)

Trend di mortalità in termini della curva di sopravvivenza

(a) rettangolarizzazione; (b) espansione

Problema assicurativo

> una tradizionale tavola di mortalità (di periodo) non fornisce una valutazione affidabile delle future probabilità di decesso (soprattutto in contratti di lunga durata)

"Proiezione" della mortalità $\Rightarrow$ *tavole di mortalità proiettate*

> costruzione di tavole basate su una previsione del futuro trend di mortalità

Qualunque sia la proiezione, futuro trend di mortalità non noto
$\Rightarrow$ rischio sistematico: *longevity risk (aggregato)*

Rappresentazione della dinamica della mortalità

Mortalità dipendente dall'età x e dall'anno di calendario t

$q_x(t)$ $=$ probabilità di decesso entro un anno per una persona di età x nell'anno di calendario t

Vedi tavola seguente

Lettura della tavola bidimensionale

- per *diagonali*: $q_0(t), q_1(t+1), \dots, q_x(t+x), \dots$
  $\Rightarrow$ tavola relativa a persone nate nell'anno t
  $\Rightarrow$ *tavola di generazione*
- per *colonne*: $q_0(t), q_1(t), \dots, q_x(t), \dots$
  $\Rightarrow$ tavola relativa a persone di tutte le età in vita nell'anno t
  $\Rightarrow$ *tavola di periodo* (o *tavola di contemporanei*)
- per *righe*: $\dots, q_x(t-1), q_x(t), q_x(t+1), \dots$
  $\Rightarrow$ evoluzione della mortalità ad età x
  $\Rightarrow$ *profilo temporale di mortalità*

Dinamica della mortalità. Tavole proiettate *(cont.)*

	$\dots$	$t-1$	t	$t+1$	$t+2$	$\dots$
0	$\dots$	$q_0(t-1)$	$q_0(t)$	$q_0(t+1)$	$q_0(t+2)$	$\dots$
1	$\dots$	$q_1(t-1)$	$q_1(t)$	$q_1(t+1)$	$q_1(t+2)$	$\dots$
2	$\dots$	$q_2(t-1)$	$q_2(t)$	$q_2(t+1)$	$q_2(t+2)$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x	$\dots$	$q_x(t-1)$	$q_x(t)$	$q_x(t+1)$	$q_x(t+2)$	$\dots$
$x+1$	$\dots$	$q_{x+1}(t-1)$	$q_{x+1}(t)$	$q_{x+1}(t+1)$	$q_{x+1}(t+2)$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\omega-1$	$\dots$	$q_{\omega-1}(t-1)$	$q_{\omega-1}(t)$	$q_{\omega-1}(t+1)$	$q_{\omega-1}(t+2)$	$\dots$

Probabilità monoannuali di decesso in un contesto dinamico

PROBABILITÀ IN UN CONTESTO DINAMICO

Uso delle probabilità monoannuali date dalla tavola: in ciascun anno t, le probabilità relative alla durata di vita di una persona di età x in quell'anno sono date dalla diagonale

$$q_x(t),\ q_{x+1}(t+1),\ q_{x+2}(t+2),\ \ldots$$

cioè dalla tavola di generazione

Probabilità per una persona di età x nell'anno t di essere in vita all'età $x+h$:

$${}_hp_x(t) = \big(1 - q_x(t)\big)\big(1 - q_{x+1}(t+1)\big) \ldots \big(1 - q_{x+h-1}(t+h-1)\big)$$

Probabilità di decesso:

$${}_{h|1}q_x(t) = {}_hp_x(t)\, q_{x+h}(t+h)$$

Vita attesa residua di generazione per una persona di età x nell'anno t:

$$\overset{\circ}{e}_x(t) = \tfrac{1}{2}\ {}_{0|1}q_x(t) + (1 + \tfrac{1}{2})\,{}_{1|1}q_x(t) + \ldots$$

APPROCCI ALLA PROIEZIONE DELLA MORTALITÀ

Vari approcci proposti in teoria ed applicati nella pratica

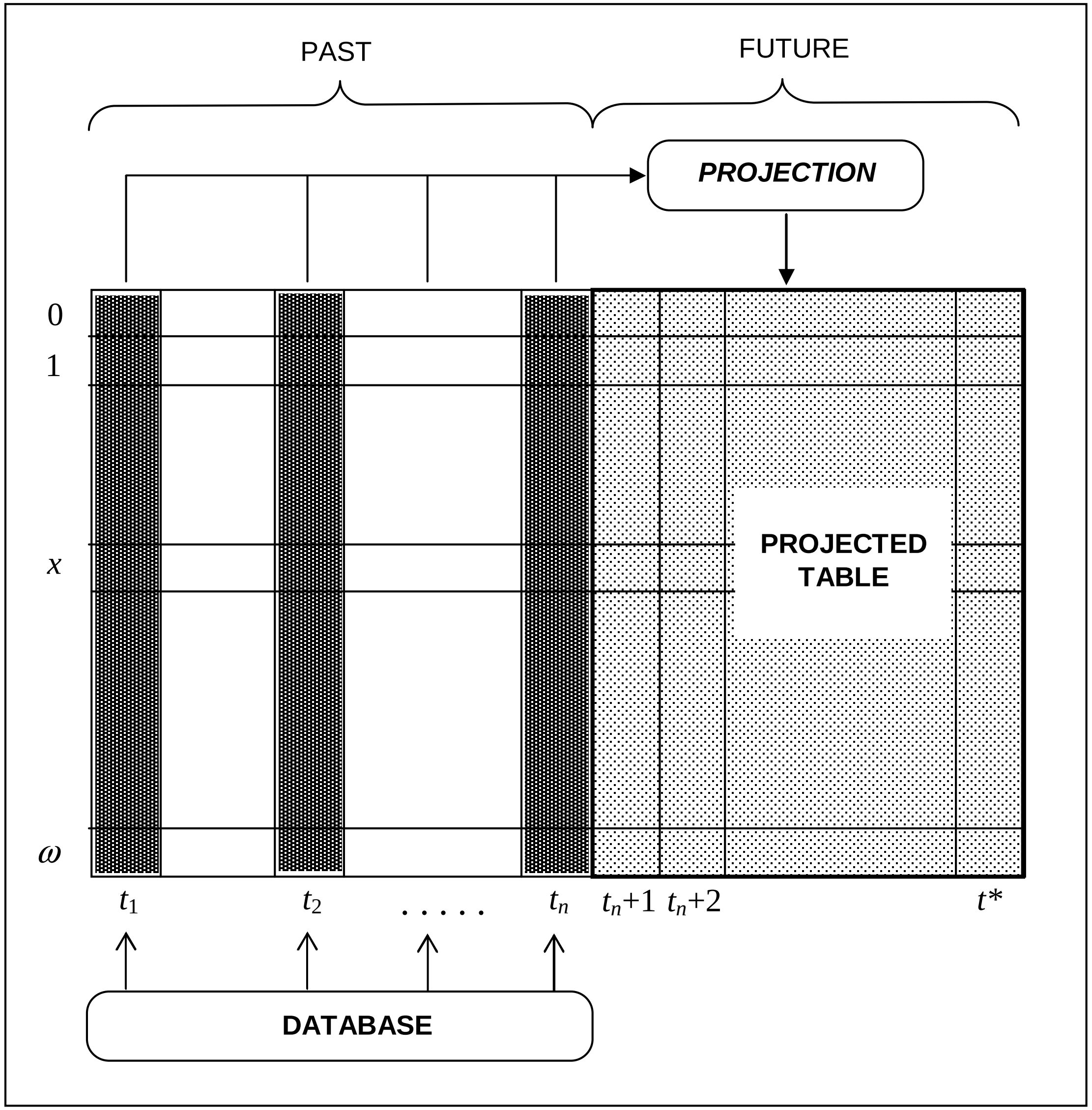
In ogni approccio, importante ruolo della mortalità osservata nel passato, che fornisce il database per le procedure di proiezione

Usualmente, il database consiste di tavole di periodo (eventualmente completate da segmenti di tavole di generazione); vedi Figura seguente

Secondo alcuni approcci, proiezioni di mortalità basate solo sulle frequenze di mortalità effettivamente osservate in passato

Altri approcci richiedono ulteriori input ($\Rightarrow$ ipotesi)

Dinamica della mortalità. Tavole proiettate *(cont.)*



Costruzione di una tavola proiettata

Approcci

1. Analisi dei profili di mortalità $q_x(t)$ per ogni età x e per $t = t_1, \dots, t_n$
   $\Rightarrow$ probabile andamento di $q_x(t)$ per $t > t_n$

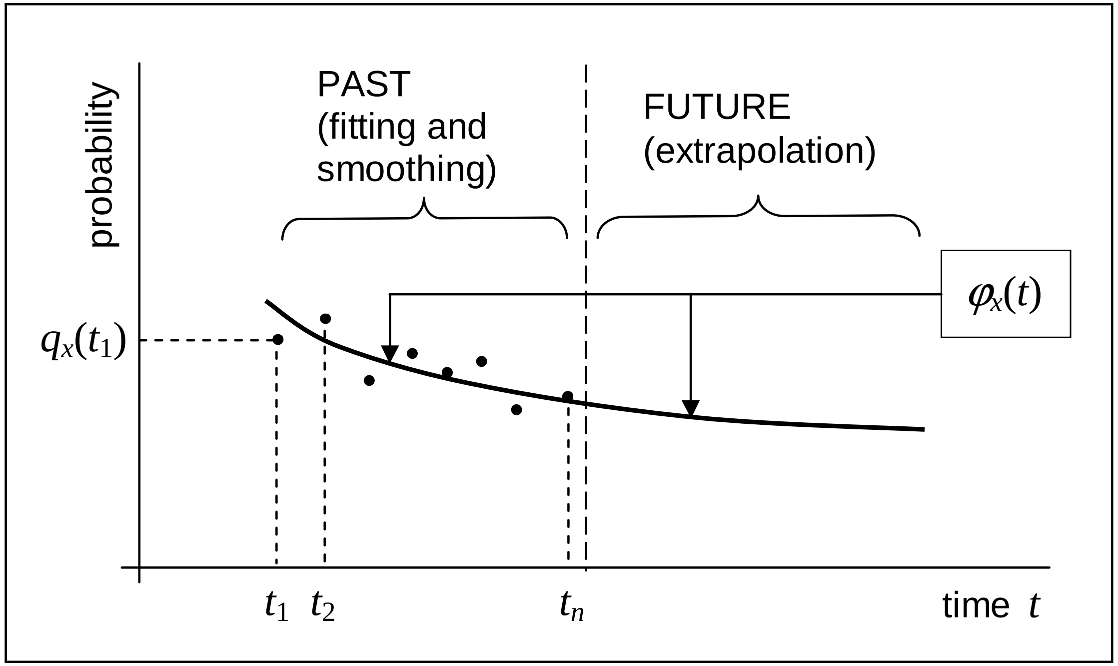
   Procedura di proiezione consistente, per ogni x, in *perequazione* rispetto al tempo t dei $q_x(t)$ osservati, e conseguente *estrapolazione* $\Rightarrow$ costruzione di una funzione $\varphi_x(t)$

   Per ogni $t > t_n$ si assume:

   $$q_x(t) = \varphi_x(t)$$

   Vedi figura seguente

Dinamica della mortalità. Tavole proiettate *(cont.)*



Estrapolazione dei $q_x(t)$

Aspetto critico: come sono interpretati i dati ?

Due interpretazioni

(a) I dati sono semplicemente numeri $\Rightarrow$ la procedura di estrapolazione non coinvolge aspetti statistici; l'output della procedura è solo una *stima puntuale* della futura mortalità

(b) I dati sono interpretati come realizzazioni di variabili aleatorie (frequenze aleatorie di decesso), la procedura di estrapolazione deve basarsi su ipotesi statistiche $\Rightarrow$ la mortalità futura può essere rappresentata in termini di *stima puntuale* e *stima intervallare*

Osservazione

Metodi di perequazione ed estrapolazione si basano sull'ipotesi che il trend osservato continui in futuro

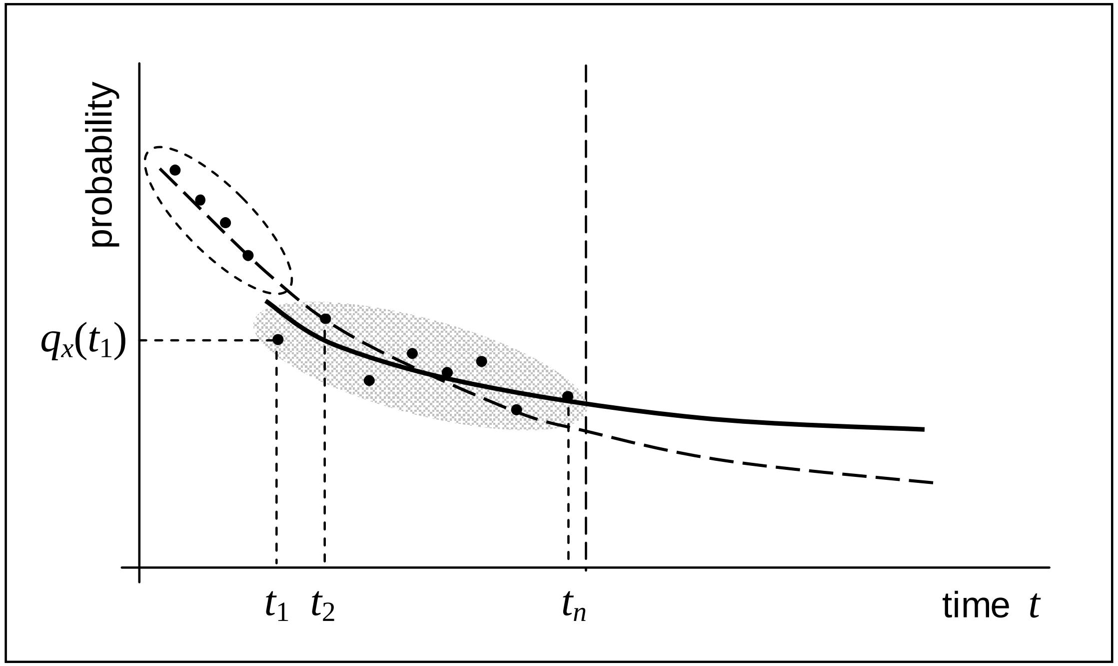
Quanti anni da considerare per la perequazione ?

L'analisi dovrebbe essere limitata al trend osservato in periodi relativamente recenti $\Rightarrow$ evitare l'inclusione di cause di miglioramento della mortalità il cui effetto è da considerarsi già estinto

Vedi Figura seguente

Scelta del periodo di analisi del trend: *calibrazione* del modello

Dinamica della mortalità. Tavole proiettate *(cont.)*



Dipendenza dei risultati dell'estrapolazione dal periodo di perequazione

2. Si possono considerare per la proiezione *informazioni collaterali*; per esempio:
   - trends delle abitudini di fumo
   - trends dell'incidenza di alcune patologie
   - miglioramenti nelle conoscenze mediche e chirurgiche
   - . . .

   Proiezioni in base ad uno *scenario* ipotizzato $\Rightarrow$ consegue un certo grado di arbitrarietà
3. procedure di estrapolazione ed ipotesi di scenario impiegabili per proiettare la *mortalità per cause*, anziché la mortalità in termini "aggregati"
   - ▷ utile analisi delle variazioni dell'incidenza delle varie cause
   - ▷ problemi: complessi legami tra cause di decesso (ipotesi classica di indipendenza comunemente accettata); difficile identificazione della reale causa di decesso in persone molto anziane

ESTRAPOLAZIONE MEDIANTE FORMULE ESPONENZIALI

Si consideri l'approccio 1(a)

Osservazioni di periodo disponibili per una data popolazione

Ciascuna osservazione consiste nella mortalità in funzione dell'età, per un dato insieme di età, $x_{\min}, x_{\min}+1, \dots, x_{\max}$

Osservazione relativa all'anno di calendario t, $t = t_1, t_2, \dots, t_n$:

$$q_{x_{\min}}(t), q_{x_{\min}+1}(t), \dots, q_{x_{\max}}(t)$$

Per ogni x, la sequenza

$$q_x(t_1), q_x(t_2), \dots, q_x(t_n)$$

rappresenta il profilo di mortalità osservato

Si assuma che

- il trend osservato negli anni passati possa essere perequato con una funzione $\varphi_x(t)$ esponenziale
- il trend osservato continui negli anni futuri

$\Rightarrow$ la futura mortalità può essere stimata estrapolando il trend stesso

Formalmente:

$$q_x(t) = q_x(t')\, r_x^{t-t'} \qquad (*)$$

dove

- t' = *anno base* (per es. l'anno corrente)
- r_x = *fattore di variazione annuale* (*fattore di riduzione* se $r_x < 1$) della mortalità ad età x, stimato in base al profilo di mortalità osservato

Se $r_x < 1$ (usuale), dalla $(^*)$ segue

$$\lim_{t \to +\infty} q_x(t) = 0$$

Si può adottare la seguente formula con *mortalità asintotica* (positiva):

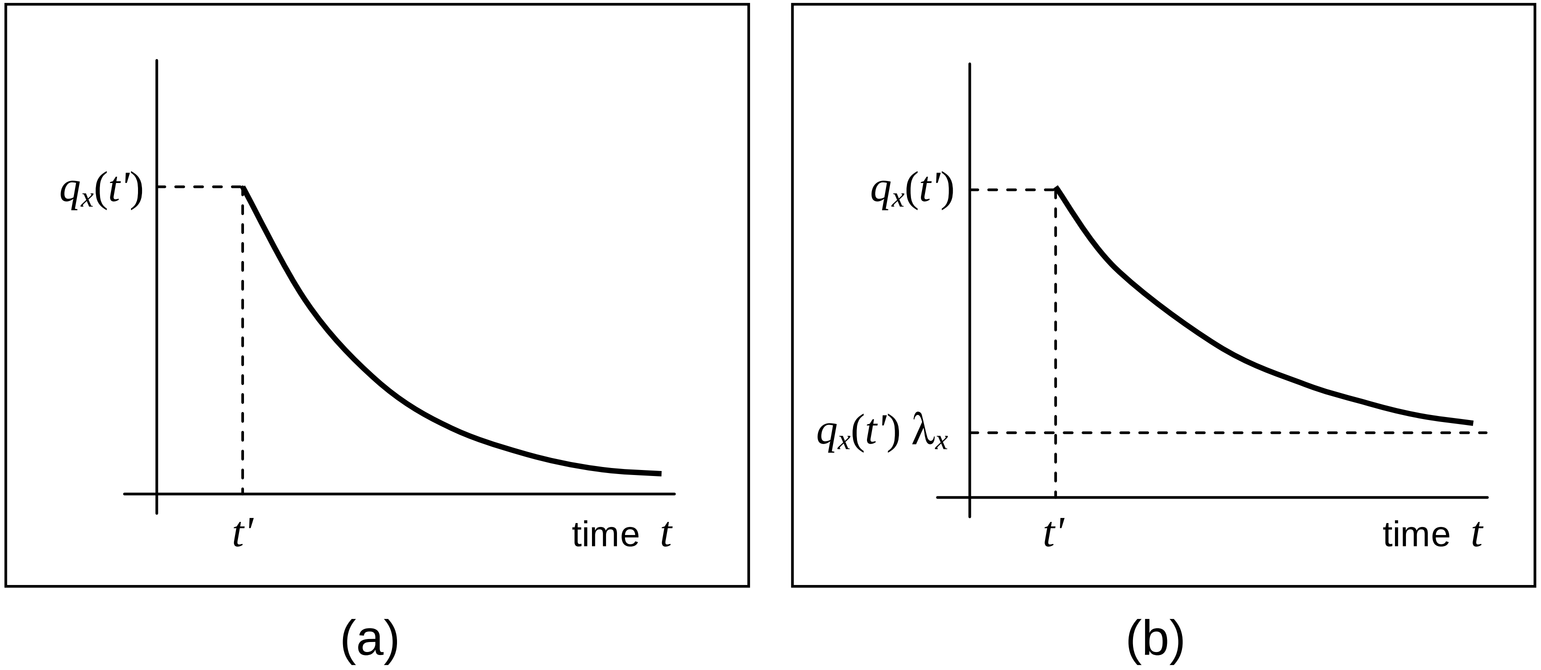
$$q_x(t) = q_x(t') \left(\lambda_x + (1 - \lambda_x)\, r_x^{t-t'} \right) \qquad \text{con} \quad \lambda_x \geq 0$$

Mortalità asintotica ad età x :

$$\lim_{t \to +\infty} q_x(t) = q_x(t')\, \lambda_x$$

Vedi Figure seguenti

Dinamica della mortalità. Tavole proiettate *(cont.)*



Modelli esponenziali

Proiezioni di mortalità. Aspetti stocastici

Aspetti fondamentali:

- i tassi di mortalità osservati sono realizzazioni di variabili aleatorie che rappresentano la mortalità passata
- i tassi di mortalità proiettati sono stime di variabili aleatorie che rappresentano la mortalità futura

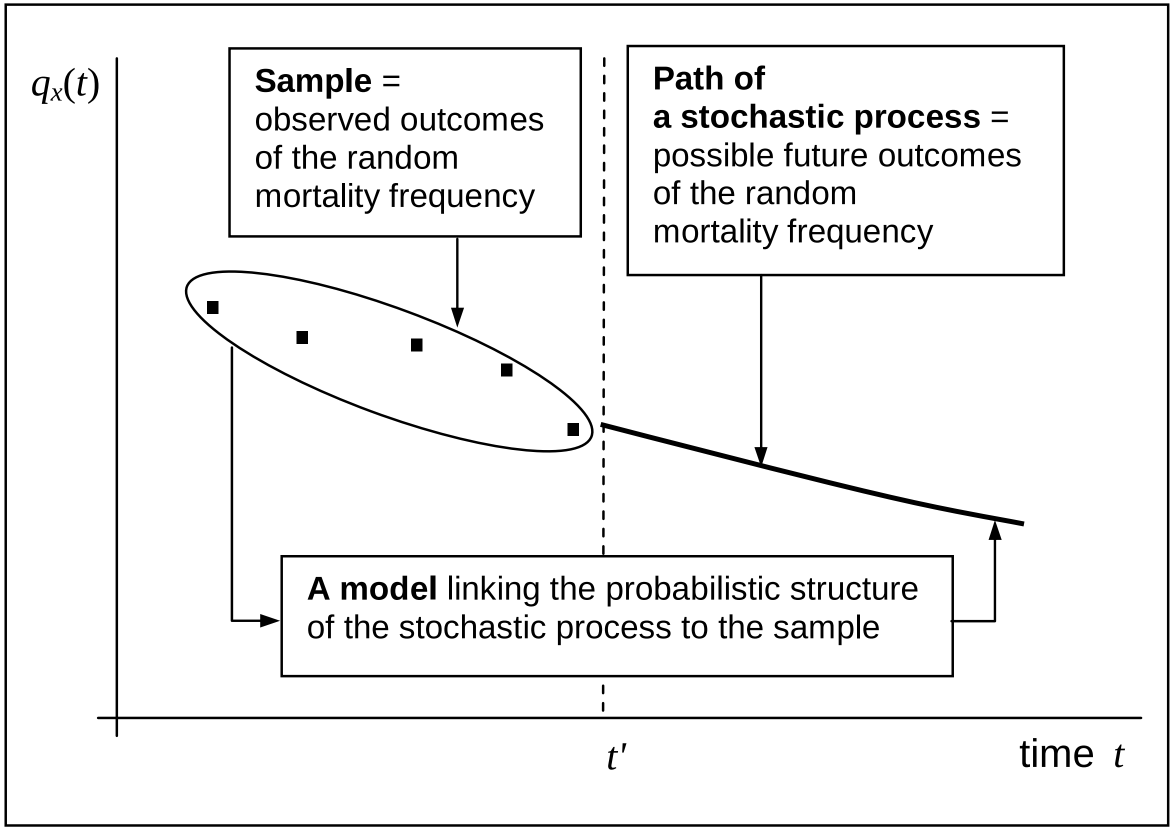
Quindi:

- sono richieste ipotesi probabilistiche sulla mortalità, cioè distribuzioni di probabilità per i numeri di decessi alle varie età
- va specificata una struttura statistica che leghi valori proiettati a valori osservati

$\Rightarrow$ *procedure di proiezione stocastica*

Esempio: il metodo di Lee-Carter (1992) implementa l'approccio 1(b)

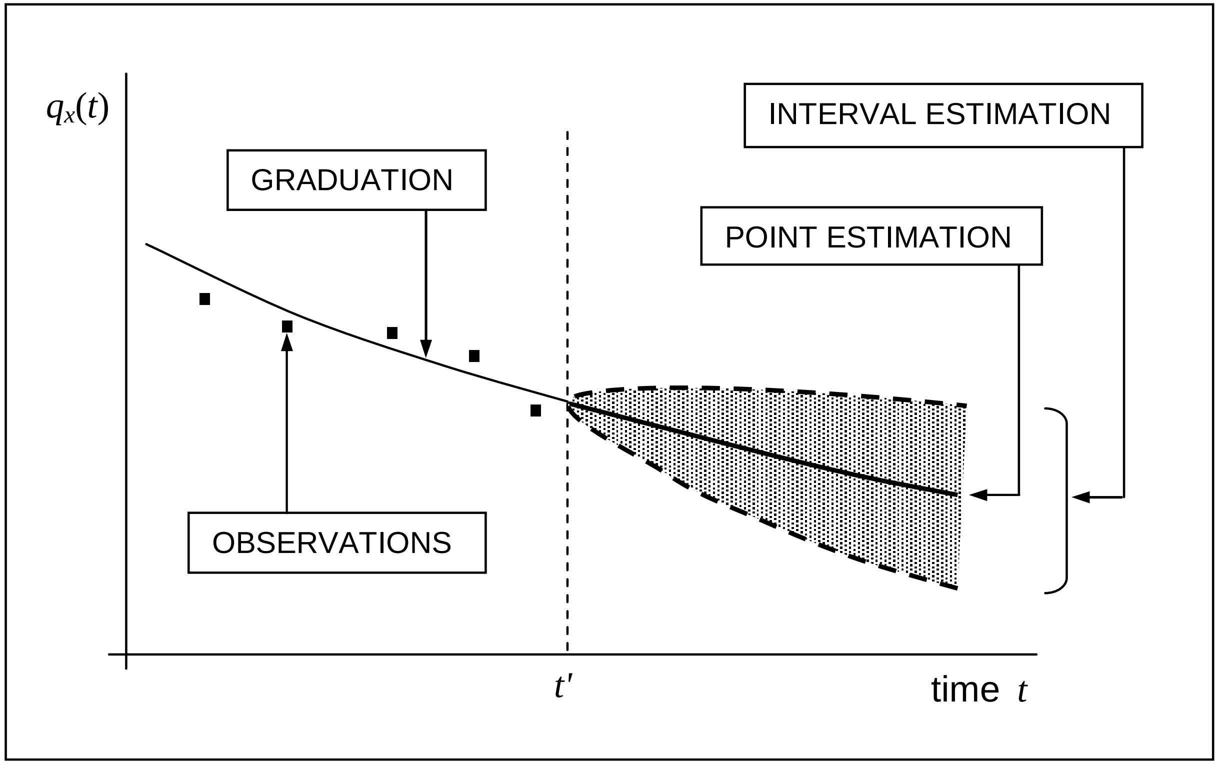
Dinamica della mortalità. Tavole proiettate *(cont.)*



Approccio statistico nella procedura di perequazione - proiezione

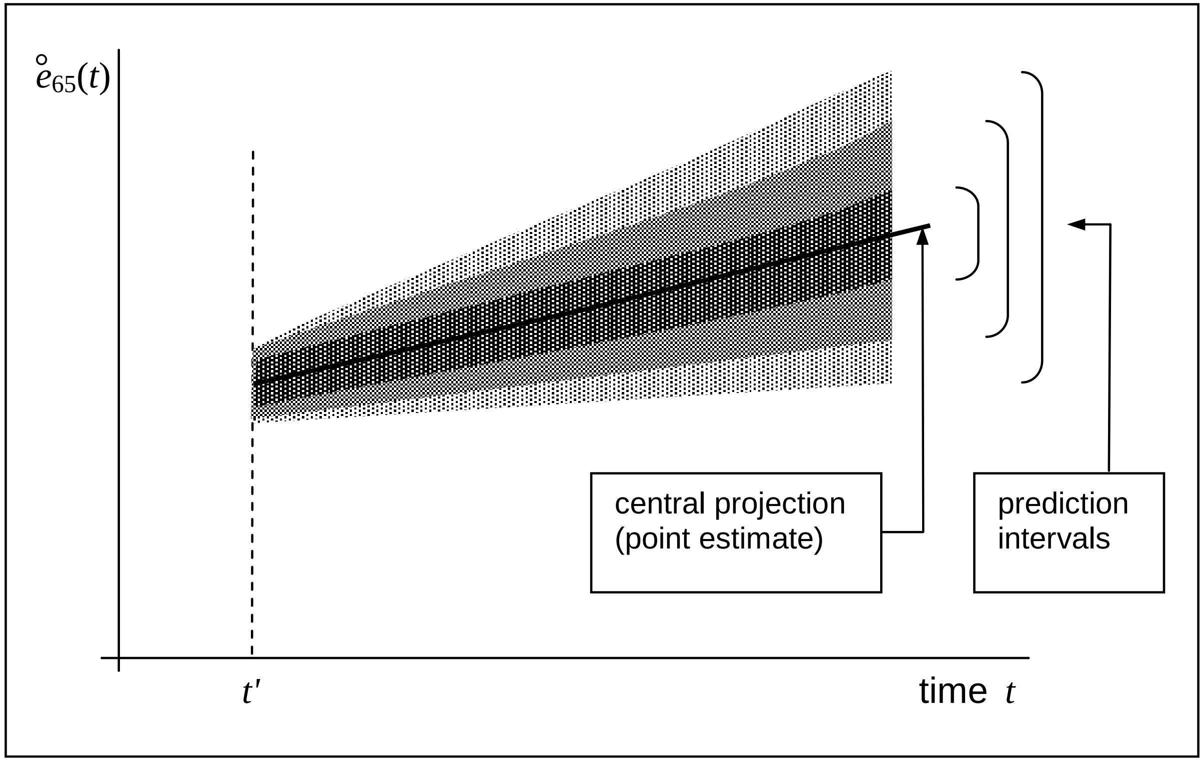
Risultati di una procedura di proiezione stocastica:

- stime puntuali dei tassi di mortalità futuri
- stime intervallari dei tassi di mortalità futuri



Stima puntuale e stima intervallare

- *fan charts* relativi alla proiezione della vita attesa
  - proiezione centrale
  - intervalli di predizione



Fan chart della vita attesa

3.9 MODELLI A TEMPO CONTINUO

Calcolare valori attuariali in corrispondenza ad età e/o durate non necessariamente intere

Approcci:

(1) approssimare i valori attuariali, ad es. mediante interpolazioni lineari

(2) approssimare le probabilità, partendo da quelle fornite dalla tavola di mortalità (che tabula le varie funzioni sui soli interi), ad es. mediante interpolazioni lineari

(3) adottare un modello biometrico a tempo continuo $\Rightarrow$ valori attuariali nel continuo
   - ▷ possibilità di calcolare probabilità tipo ${}_tp_x$, ${}_{t|1}q_x$, $\ldots$ con x e/o t non interi
   - ▷ necessari strumenti diversi dalla tavola di mortalità

LA FUNZIONE DI SOPRAVVIVENZA

Si definisca, per $t \geq 0$, la seguente funzione

$$S(t) = \mathbb{P}[T_0 > t]$$

detta *funzione di sopravvivenza*

Si consideri la probabilità ${}_hp_x$, espressa come segue:

$$\mathbb{P}[T_x > h] = \mathbb{P}[T_0 > x + h \,|\, T_0 > x] = \frac{\mathbb{P}[T_0 > x + h]}{\mathbb{P}[T_0 > x]}$$

Si trova:

$${}_hp_x = \frac{S(x+h)}{S(x)}$$

Si ha poi:

$$ {}_hq_x = 1 - {}_hp_x = \frac{S(x) - S(x+h)}{S(x)} $$

$$ {}_{h|k}q_x = {}_hp_x \; {}_kq_{x+h} = \frac{S(x+h) - S(x+h+k)}{S(x)} $$

Relazione tra funzione di sopravvivenza e tavola di mortalità: essendo ℓ_x il numero atteso di persone in vita tra le iniziali ℓ_0, si ha:

$$ \ell_x = \ell_0 \, \mathbb{P}[T_0 > x] $$

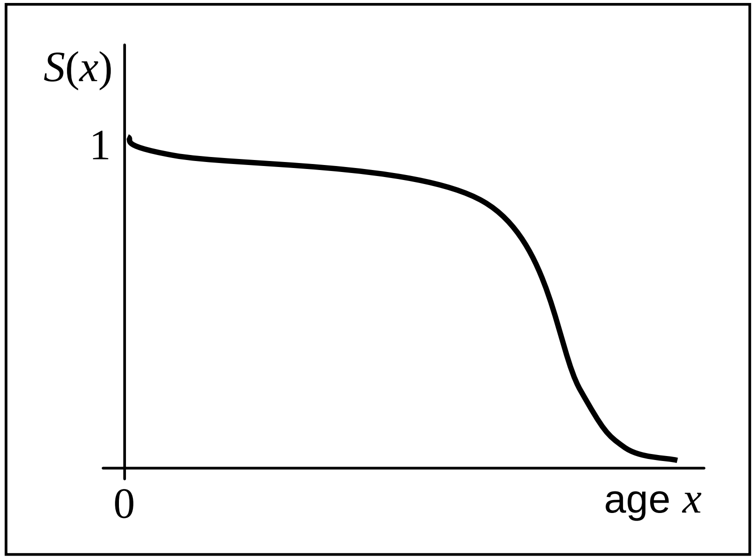
e in termini della funzione di sopravvivenza:

$$ \ell_x = \ell_0 \, S(x) $$

(ipotesi: tutti gli individui hanno mortalità descritta dalla $S(x)$)

$\Rightarrow$ ℓ_x è una tabulazione (sugli x interi) della funzione $S(x)$

Tipica forma del grafico della funzione di sopravvivenza $S(x)$
$\Rightarrow$ analogia con ℓ_x



Funzione di sopravvivenza

"Costruzione" della funzione di sopravvivenza

Sia disponibile una tavola di mortalità (per esempio ricavata da osservazioni di periodo)

Si ponga, per $x = 0, 1, \dots, \omega$:

$$S(x) = \frac{\ell_x}{\ell_0}$$

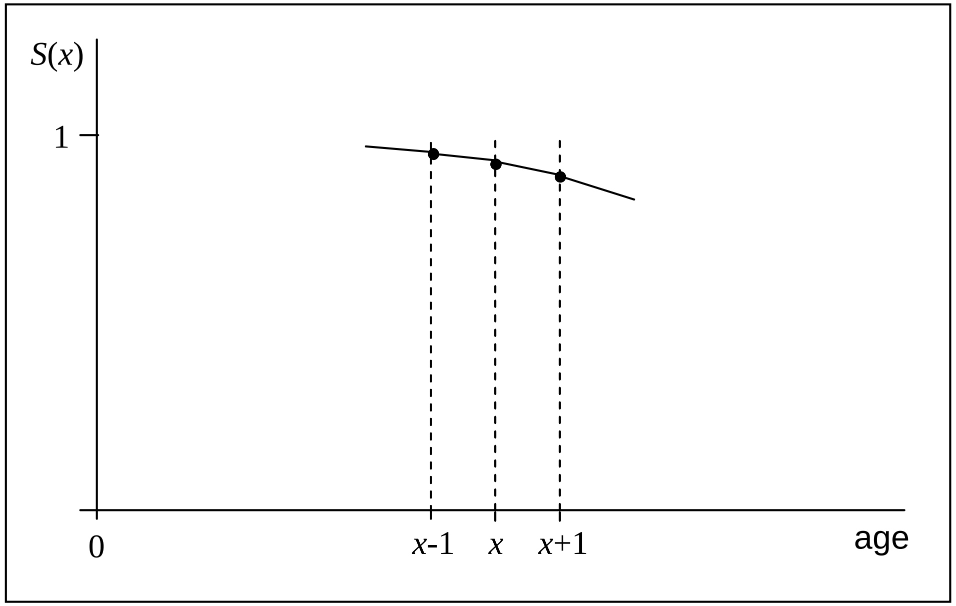
Quindi, per $x = 0, 1, \dots, \omega - 1$ e $0 < t < 1$, si definisca

$$S(x + t) = (1 - t)\, S(x) + t\, S(x + 1)$$

e si assuma $S(x) = 0$ per $x > \omega$

$\Rightarrow$ funzione $S(x)$ lineare a tratti

Vedi Figura seguente



Funzione di sopravvivenza: costruzione per interpolazione lineare

Possibili modelli di perequazione diversi da quello lineare

Alternativa: reimpostazione, partendo dal concetto di “intensità di mortalità”

FUNZIONI COLLEGATE

Siano:

- $F_0(x)$ funzione di ripartizione della durata aleatoria di vita T_0
- $f_0(x)$ funzione di densità (pdf) della durata aleatoria di vita T_0

Quindi

$$F_0(x) = \mathbb{P}[T_0 \leq x]$$

cioè

$$F_0(x) = {}_x q_0$$

Risulta ovviamente

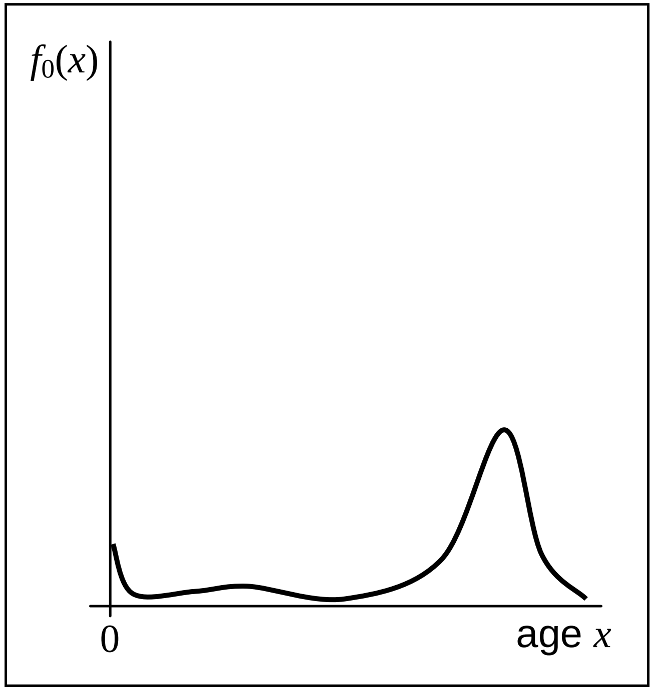
$$F_0(x) = 1 - S(x)$$

Relazione tra funzione di ripartizione $F_0(x)$ e pdf $f_0(x)$:

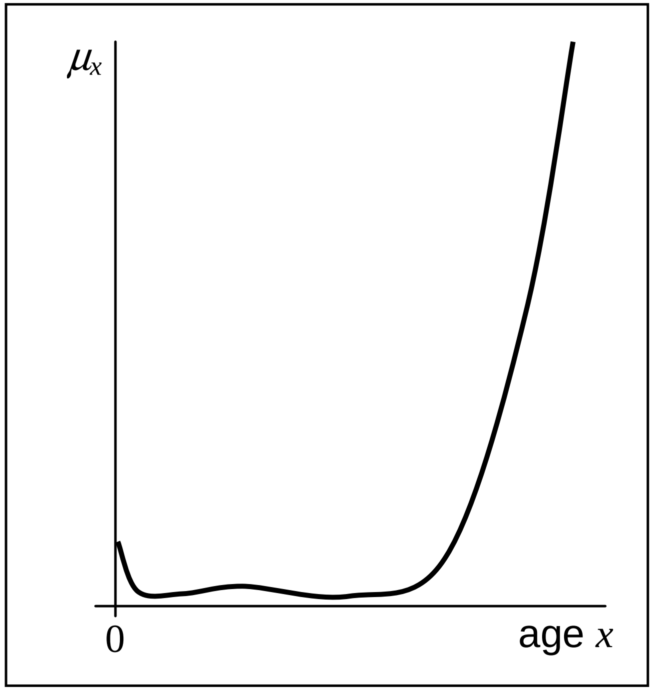
$$F_0(x) = \int_0^x f_0(t)\,\mathrm{d}t$$

Assumendo $f_0(x)$ continua per $x > 0$:

$$f_0(x) = \frac{\mathrm{d}F_0(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}S(x)}{\mathrm{d}x}$$



Funzione di densità



Intensità di mortalità

Grafico di $f_0(x)$ chiamato *curva dei decessi* (analogia con il grafico dei d_x nel modello a tempo discreto)

Riferimento alla v.a. T_x, ($x > 0$)

Funzione di ripartizione:

$$F_x(t) = \mathbb{P}[T_x \leq t] = \frac{\mathbb{P}[x < T_0 \leq x + t]}{\mathbb{P}[T_0 > x]} = \frac{F_0(x+t) - F_0(x)}{S(x)}$$

Funzione di densità:

$$f_x(t) = \frac{\mathrm{d}F_x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}F_0(x+t)}{\mathrm{d}t}}{S(x)} = \frac{f_0(x+t)}{S(x)}$$

Da $F_x(t)$ e $f_x(t)$ (e in particolare da $F_0(t)$ e $f_0(t)$) $\Rightarrow$ tutte le probabilità usate nel calcolo attuariale

Esempio:

$$
{}_tp_x = 1 - F_x(t) = \int_t^{+\infty} f_x(u)\,du = \frac{1}{S(x)} \int_t^{+\infty} f_0(x+u)\,du
$$

INTENSITÀ DI MORTALITÀ

Si consideri la funzione definita per $x \geq 0$ dalla:

$$
\mu_x = \lim_{t \to 0} \frac{{}_tq_x}{t}
$$

La μ_x è chiamata *forza di mortalità*, o *intensità (istantanea) di mortalità*, o *hazard function*

La μ_x può essere

- stimata per x interi e frazionari mediante osservazioni di periodo
- perequata, in particolare mediante modelli parametrici (o "leggi di mortalità"; vedi esempi nel seguito)

Grafico dell'intensità di mortalità: vedi Figura

Relazione tra grafico dell'intensità di mortalità e curva dei decessi $f_0(x)$: vedi $(^*)$

Relazione tra funzione di sopravvivenza e intensità di mortalità:

$$\mu_x = \lim_{t \to 0} \frac{{}_tq_x}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{S(x) - S(x+t)}{t\,S(x)}$$

e quindi

$$\mu_x = \frac{-\dfrac{\mathrm{d}S(x)}{\mathrm{d}x}}{S(x)}$$

e anche:

$$\mu_x = \frac{f_0(x)}{S(x)} \qquad (*)$$

Quindi

- ▷ assegnata la $S(x)$ si può ricavare la μ_x
- ▷ nota la $S(x)$, la μ_x non aggiunge informazioni sulla mortalità
- ▷ ruolo della μ_x: espressione di ipotesi sull'andamento della mortalità in funzione dell'età (vedi modello di Gompertz)

Assegnata la $\mu_x \;\Rightarrow\;$ funzione di sopravvivenza (con $S(0) = 1$) espressa dalla:

$$S(x) = \exp\left(- \int_0^x \mu_t \, \mathrm{d}t \right)$$

Dalla μ_x (direttamente o via $S(x)$) $\Rightarrow$ probabilità impiegate nel calcolo attuariale

Esempio:

$$q_x = 1 - p_x = 1 - \frac{S(x+1)}{S(x)} = 1 - \exp\left(-\int_x^{x+1} \mu_t \, \mathrm{d}t\right)$$

Osservazione 1

Funzioni dell'età x, nei modelli a tempo

- discreto: $\ell_x, q_x, d_x, \ldots$
- continuo: $S(x), f_0(x), \mu_x, \ldots$

sono esempi di *funzioni biometriche* (altre funzioni biometriche: invalidità, mortalità degli invalidi, ecc.)

Assegnata una di tali funzioni (in un dato modello), si possono ricavare le altre

Esempio:

- in un modello discreto, dalla ℓ_x si ricavano q_x, d_x, ecc.
- in un modello continuo, dalla μ_x si ricava la $S(x)$ e quindi le altre funzioni

Osservazione 2

Relazioni tra quantità impiegate nei modelli discreti (es. ℓ_x, d_x, ecc.) e quantità impiegate nei modelli continui (es. $S(x)$, $f_0(x)$, ecc.) $\Rightarrow$ interesse nell'interpretazione delle rappresentazioni grafiche

Esempi:

- analogia tra ℓ_x e $S(x)$ emerge dalla $S(x) = \dfrac{\ell_x}{\ell_0}$
- relazione tra d_x e $f_0(x)$
  - ▷ d_x = opposto delle differenze prime della funzione ℓ_x
  - ▷ $f_0(x)$ = opposto della derivata prima di $S(x)$

Analoga relazione tra ${}_{x|1}q_0 = \dfrac{d_x}{\ell_0}$ e $f_0(x)$

Osservazione 3

- Passaggio **continuo** $\longrightarrow$ **discreto**
  - ▷ immediato
  - ▷ esempio:

$$q_x = 1 - \exp\left(-\int_x^{x+1} \mu_t \,\mathrm{d}t\right)$$

    per qualunque x intero

- Passaggio **discreto** $\longrightarrow$ **continuo**
  - ▷ necessità di ipotesi
  - ▷ esempio: interpolazione lineare di ℓ_x (definita per x interi) per ottenere $S(x)$ (per ogni x reale)

VALORI SINTETICI ("MARKERS")

Ciascun marker sintetizza in un numero la distribuzione di probabilità della T_x (T_0 in particolare)

Markers di posizione

- *Vita attesa alla nascita* (o *speranza di vita alla nascita*):

$$\bar{e}_0 = \mathbb{E}[T_0] = \int_0^{+\infty} t\, f_0(t)\,\mathrm{d}t$$

Integrando per parti:

$$\bar{e}_0 = \int_0^{+\infty} S(t)\,\mathrm{d}t$$

- *Vita attesa residua ad età* x (o *speranza di vita ad età* x):

$$\bar{e}_x = \mathbb{E}[T_x] = \int_0^{+\infty} t\, f_x(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{S(x)} \int_0^{+\infty} S(x+t)\,\mathrm{d}t$$

  Osservazione

  Si può dimostrare che, applicando la regola di integrazione mediante trapezi per il calcolo di $\bar{e}_0$ e di $\bar{e}_x$, si ottengono (come approssimazioni) i valori attesi $\mathring{e}_0$ ed $\mathring{e}_x$

- *Età attesa al decesso per una persona di età* x:

$$x + \mathbb{E}[T_x] = x + \bar{e}_x$$

- *Punto di Lexis*: età (anziana) $x^{(\mathrm{L})}$ tale che

$$f_0(x^{(\mathrm{L})}) = \max_x \{f_0(x)\}$$

Markers di dispersione

- *Varianza della durata aleatoria di vita*: tradizionale misura di dispersione

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}[T_0] = \int_0^{+\infty} (t - \bar{e}_0)^2 \, f_0(t) \, \mathrm{d}t$$

- *Interquartile range* della distribuzione di probabilità di T_0:

$$\mathrm{IQR}[T_0] = x^{(75)} - x^{(25)}$$

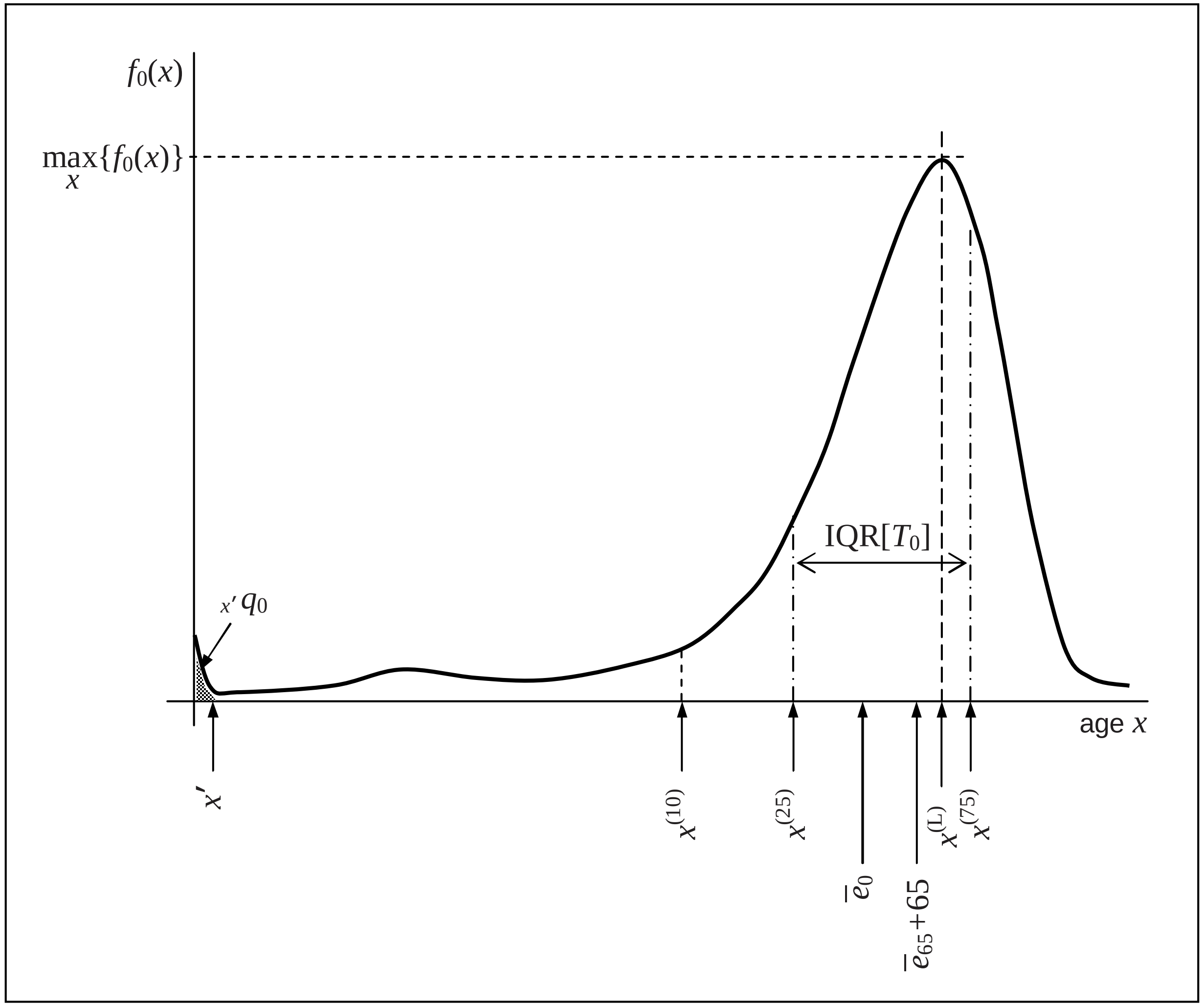
con $x^{(25)}$ e $x^{(75)}$ rispettivamente il 1° quartile (25° percentile) e il 3° quartile (75° percentile), cioè le età tali che:

$$S(x^{(25)}) = 0.75$$

$$S(x^{(75)}) = 0.25$$

IQR misura di dispersione: $\mathrm{IQR}[T_0]$ tanto minore quanto meno dispersa è la distribuzione di probabilità di T_0 (vedi Figura)

Modelli a tempo continuo *(cont.)*



Markers in un modello a tempo continuo

Altri markers

- *Endurance* = età raggiunta con probabilità 0.90, uguale quindi al 10° percentile, $x^{(10)}$, della distribuzione di probabilità di T_0:

$$S(x^{(10)}) = 0.90$$

- *Ageing threshold AT*: dato z (ad esempio, se interessa la mortalità ad età anziane: $z = 10$ o 15), $AT(z)$ è l'età tale che la vita attesa residua sia uguale a z; formalmente:

$$\bar{e}_{AT(z)} = z$$

- *Mortalità infantile*: può essere quantificata dalla probabilità che un neonato deceda prima di una data età x' (as es. $x' = \frac{1}{12}$, o $x' = 1$, o $x' = 5$):

$$_{x'}q_0 = 1 - S(x') = \int_0^{x'} f_0(t)\,\mathrm{d}t$$

MODELLI PARAMETRICI (O "LEGGI" DI MORTALITÀ)

Vari modelli, a tempo discreto o a tempo continuo, proposti per esprimere mediante una funzione (o "legge") la relazione tra mortalità ed età

Esempio di modello a tempo discreto (in quanto riferito a probabilità monoannuali): legge di Heligman-Pollard

Vari modelli parametrici definiti in termini di:

- ▷ numeri attesi di superstiti ℓ_x
- ▷ probabilità q_x o odds $\dfrac{q_x}{1-q_x}$
- ▷ funzione densità $f_0(x)$
- ▷ funzione intensità di mortalità μ_x

Considereremo modelli per l'intensità di mortalità

Legge di Gompertz (1825)

$$\mu_x = \alpha\, \mathrm{e}^{\beta\, x} \quad (\text{con } \alpha, \beta > 0) \qquad (*)$$

Notazione equivalente:

$$\mu_x = B\, c^x \quad (\text{con } B, c > 0)$$

Ipotesi su cui si basa la legge di Gompertz: passando da età x ad età $x + \Delta x \;\Rightarrow\;$ incremento dell'intensità di mortalità proporzionale a valore iniziale μ_x e ampiezza dell'intervallo $\Delta x \;\Rightarrow\;$ ipotesi di "invecchiamento"; formalmente:

$$\Delta\mu_x = \beta\, \mu_x\, \Delta x + 0(\Delta x)$$

Per $\Delta x \;\to\; 0$, si ricava:

$$\frac{\mathrm{d}\mu_x}{\mathrm{d}x} = \beta\, \mu_x,$$

Integrando si ottiene la $(*)$

Impiego limitato a rappresentare la mortalità ad età adulte ed anziane

Prima legge di Makeham (1867)

Generalizza la legge di Gompertz:

$$\mu_x = \gamma + \alpha\,\mathrm{e}^{\beta\,x}$$

dove $\gamma \geq 0$ (indipendente dall'età) rappresenta la mortalità non dovuta ad invecchiamento (ad es. accidentale)

Notazione equivalente:

$$\mu_x = A + B\,c^x$$

Mediante la $S(x) = \exp\left(-\int_0^x \mu_t\,\mathrm{d}t\right)$, si ottiene:

$$S(x) = \exp\left(-A\,x - \frac{B}{\log c}(c^x - 1)\right)$$

Con $A = 0 \;\Rightarrow$ funzione di sopravvivenza della legge di Gompertz

Osservazione

Prima legge di Makeham: primo esempio di modello di mortalità “per cause”; in generale, con n cause di morte:

$$\mu_x = \sum_{j=1}^{n} \mu_x^{(j)}$$

dove $\mu_x^{(j)}$ = intensità di mortalità ad età x per la causa j

Seconda legge di Makeham (1890)

Ulteriore generalizzazione della legge di Gompertz:

$$\mu_x = \gamma + \delta\, x + \alpha\, \mathrm{e}^{\beta\, x}$$

Legge di Siler (1979)

Generalizzazione della prima legge di Makeham, al fine di rappresentare, mediante addendo esponenziale negativo, la mortalità infantile decrescente con l'età:

$$\mu_x = \alpha_1 \, \mathrm{e}^{-\beta_1 \, x} + \gamma + \alpha_2 \, \mathrm{e}^{\beta_2 \, x} \qquad (^\circ)$$

Osservazione

La $(^\circ)$ era stata proposta da W. Lazarus (1867), ma probabilmente abbandonata per difficoltà, a quel tempo, di stima dei parametri (come del resto accadde per la legge di Thiele; vedi seguito)

Legge di Thiele (1871)

Obiettivo: rappresentare la mortalità su tutto l'arco della vita umana

$$\mu_x = \underbrace{\alpha_1 \, \mathrm{e}^{-\beta_1 \, x}}_{\text{(1)}} + \underbrace{\alpha_3 \, \mathrm{e}^{-\beta_3 (x-\theta)^2}}_{\text{(2)}} + \underbrace{\alpha_2 \, \mathrm{e}^{\beta_2 \, x}}_{\text{(3)}}$$

con tutti i parametri > 0

(1) esponenziale negativa $\Rightarrow$ mortalità infantile (decrescente con l'età)

(2) "gaussiana" $\Rightarrow$ mortalità accidentale

(3) esponenziale positiva $\Rightarrow$ mortalità senile (crescente con l'età)

Osservazione

La legge di Heligman-Pollard riprende, in termini di odds, la stessa struttura logica

Leggi di Perks (1932)

Obiettivo: rappresentare, mediante generalizzazioni della prima legge di Makeham (vedi i numeratori delle frazioni) una mortalità senile crescente ma non esponenzialmente, come suggerito da statistiche ($\Rightarrow$ forma "logistica")

Prima legge:

$$\mu_x = \frac{\alpha\, \mathrm{e}^{\beta x} + \gamma}{\delta\, \mathrm{e}^{\beta x} + 1}$$

Seconda legge (più generale):

$$\mu_x = \frac{\alpha\, \mathrm{e}^{\beta x} + \gamma}{\delta\, \mathrm{e}^{\beta x} + \varepsilon\, \mathrm{e}^{-\beta x} + 1}$$

Vari altri modelli di tipo logistico proposti dagli anni Cinquanta

Interpretazione dei modelli logistici

Modelli logistici $\Rightarrow$ mortalità crescente a tassi decrescenti

- Interpretazione statistica
  (a) Ipotesi: si osserva la mortalità separatamente in coorti omogenee al loro interno, ma eterogenee tra loro (vedi Figura 1)
  (b) Ipotesi (a) non realistica $\Rightarrow$ la mortalità è osservabile nell'insieme di tutte le coorti
  (c) Si osserva dunque una mortalità "media"
  (d) Le coorti con mortalità maggiore si estinguono prima delle altre $\Rightarrow$ si ottiene un andamento di tipo logistico (vedi Figura 2)

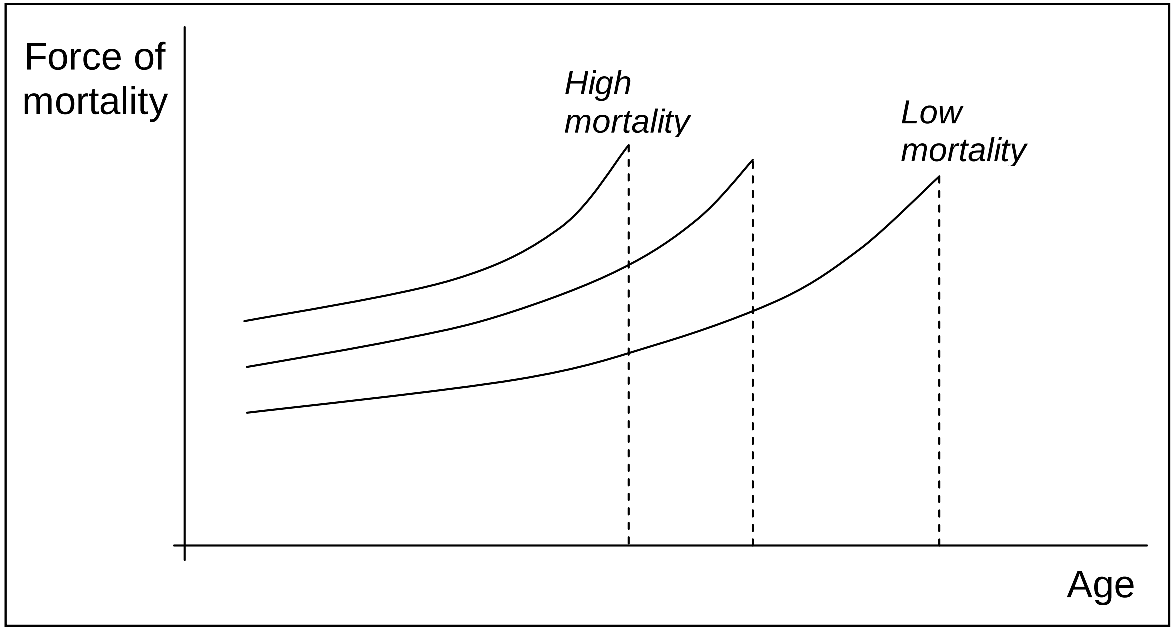


Figura 1 - Mortalità osservata separatamente in ciascuna coorte

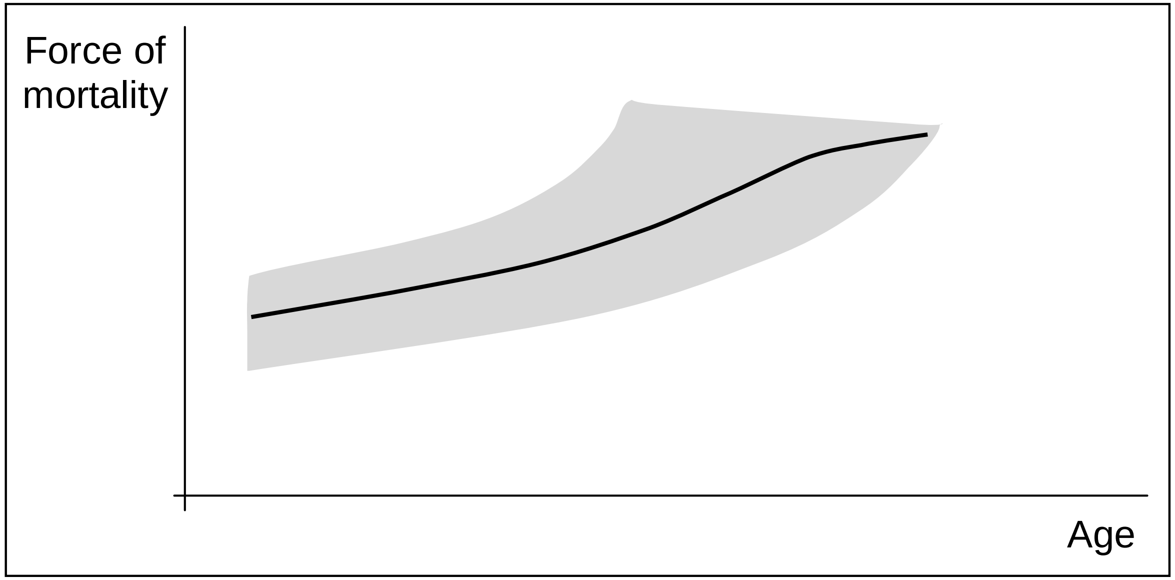


Figura 2 - Mortalità “media” osservata sull’insieme delle coorti

- Interpretazione formale
  (a) La prima legge di Perks può essere ricavata come mistura di leggi di Gompertz con parametro α (o B) aleatorio e funzione misturante Gamma
  (b) Significati
    - ▷ legge di Gompertz: mortalità individuale
    - ▷ legge di Perks: mortalità "media" in una coorte eterogenea

Legge di Weibull (1951)

Inizialmente proposta per applicazioni in teoria dell'affidabilità, successivamente impiegata anche in ambito biometrico ed attuariale

$$\mu_x = \frac{p}{\lambda^p}\, x^{p-1} \qquad (p, \lambda > 0)$$

con:

- $p = 1 \;\Rightarrow\; \mu_x$ = costante ($\Rightarrow$ legge esponenziale)
- $p > 1 \;\Rightarrow\; \mu_x$ = crescente

Si trovano, in particolare:

- ▷ funzione di sopravvivenza $S(x) = \mathrm{e}^{-(\frac{x}{\lambda})^p}$
- ▷ punto di Lexis $x^{(\mathrm{L})} = \lambda \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}$