4 PREMI

Ermanno Pitacco

Matematica attuariale delle assicurazioni vita

4.1 PRODOTTI ASSICURATIVI VITA

ASPETTI GENERALI

Oggetto di un contratto di assicurazione vita: pagare benefici dipendenti da eventi riguardanti la durata di vita di una o più persone

Gli importi dei benefici possono essere quantificati in vari modi

1. *Importi dei premi e benefici fissati alla stipulazione del contratto*
   (a) benefici di importo costante nel tempo (durata del contratto)
   (b) benefici di importo variabile in misura e secondo schemi prefissati (es. crescenti geometricamente, decrescenti aritmeticamente, ecc.)
2. *Importi iniziali dei premi e benefici fissati alla stipulazione del contratto, successivamente variabili secondo un modello di linking*. Modelli:
   (a) indicizzazione all'inflazione
   (b) unit-linked (cioè link al valore delle unità di un fondo di investmento)
   (c) partecipazione a utili, per esempio:
      i. meccanismi di bonus (Gran Bretagna)
      ii. meccanismi di "rivalutazione" (Europa Continentale)

3. *Importi dei benefici determinati in funzione dei premi progressivamente decisi dal contraente*. Possibile presenza di un modello di linking

Prodotti assicurativi con benefici

- ▷ di tipo (1): questo capitolo
- ▷ di tipo (2): in TAP (Tecnica attuariale delle assicurazioni di persone)
- ▷ di tipo (3): parte in questo capitolo e parte in TAP

Parti di un contratto assicurativo, oltre all'*assicuratore*:

- *assicurato* (o assicurati), dalla cui durata di vita dipende il pagamento dei benefici
- *contraente*, che stipula il contratto e paga il premio (o i premi)
- *beneficiario*, che riceve i benefici

Categorie di prodotti assicurativi:

- con solo *beneficio in caso vita*
  - scopo: pagare al beneficiario (che può coincidere con il contraente e l'assicurato) importi differiti
  - beneficio: somma in contanti o rendita
  - tipici prodotti: assicurazione di capitale differito e rendite vitalizie
- con solo *beneficio in caso morte*
  - scopo: far fronte alle conseguenze finanziarie del decesso
  - beneficio: solitamente somma in contanti (rendite meno comuni) pagata al beneficiario (contraente e assicurato possono coincidere)
  - prodotti tipici: assic. temporanea caso morte, e a vita intera caso morte
- con *beneficio in caso morte e beneficio in caso vita*
  - solitamente il pagamento di un beneficio è certo, sebbene in momento aletorio
  - beneficio: somma in contanti; usualmente due beneficiari, uno per beneficio caso morte, uno per beneficio caso vita
  - prodotti tipici: assicurazioni miste

Ulteriori categorie (non trattate qui, ma in TAP): per esempio

- prodotti con benefici in caso di invalidità dell'assicurato
- prodotti con benefici legati alle condizioni di salute dell'assicurato, es. assicurazioni malattia

Vari schemi di pagamento premi; in particolare:

- ○ *premio unico*, pagato alla stipulazione del contratto
- ○ sequenza di *premi periodici*, il primo alla stipulazione del contratto, gli altri ad es. agli anniversari di contratto

Qualunque sia lo schema di pagamento premi, in ogni istante il contraente deve essere in posizione di credito (e quindi l'assicuratore in posizione di debito: *condizione di finanziamento* nel calcolo dei premi)

Premi, benefici e spese: elementi monetari di ogni prodotto assicurativo (vita, in particolare)

I relativi cash flow si sviluppano lungo la durata contrattuale

Per ottenere una situazione di equilibrio, i premi devono “finanziare” benefici e spese

Quindi

- se i benefici sono stabiliti e le spese quantificate, devono essere determinati i premi
- se l’ammontare dei premi è scelto dal contraente, si calcolano i benefici finanziati dai premi (al netto delle spese)

Relazione tra premi e benefici e spese $\Rightarrow$ *principio di calcolo del premio*

Principio comune in assicurazione vita: *principio di equità* $\Rightarrow$ calcolo del valore attuale atteso (o *valore attuariale*) dei benefici (e spese)

ALTERAZIONI DI UN CONTRATTO ASSICURATIVO

Conclusione “naturale” di un contratto assicurativo vita: o la scadenza del contratto stesso (con pagamento dell’eventuale beneficio caso vita), o il decesso dell’assicurato (con pagamento dell’eventuale beneficio caso morte)

Il contraente ha il diritto (secondo le condizioni contrattuali) di “alterare” alcuni elementi del contratto. In particolare:

- ▷ conclusione anticipata
- ▷ trasformazione

Alterazione $\Rightarrow$ variazione nelle sequenze di cash flow (premi, spese e benefici)

Conclusione anticipata solitamente a causa di cessazione del pagamento premi periodici. Varie situazioni e relative conseguenze

- Se il contratto prevede un beneficio certo, viene pagato all'assicurato un importo (*valore di riscatto*) collegato al credito dell'assicurato
- Se il contratto prevede un beneficio solo in caso di sopravvivenza a scadenza, la cessazione del pagamento premi comporta una riduzione del beneficio a scadenza (anziché un pagamento in contanti), per ridurre l'antiselezione; vedi Trasformazione
- Nessun valore di riscatto (e quindi nessun pagamento in contanti) se il credito dell'assicurato è molto piccolo
  - nei primi anni di contratto di vari prodotti assicurativi a premio periodico
  - per l'intera durata contrattuale di assicurazioni di breve durata con solo beneficio caso morte

  cessazione pagamento premi $\Rightarrow$ *storno* del contratto

Trasformazione di un contratto assicurativo: variazione in alcuni elementi del contratto

Esempi

- aumento dei benefici; contratto con benefici aumentati finanziato da
  - credito dell'assicurato
  - maggiori premi futuri
- trasformazione di un contratto assicurativo in un contratto *liberato* da premi (o *paid-up*)
  - benefici finanziati solo dal credito dell'assicurato
  - nessun ulteriore pagamento di premi
  - benefici ridotti (*riduzione*)

4.2 VALORI ATTUARIALI

Ciascun contratto assicurativo origina *flussi di cassa*

- in entrata: ogni sequenza di importi incassati dall'assicuratore
- in uscita: ogni sequenza di importi pagati dall'assicuratore

PREMI, BENEFICI, SPESE

In entrata: una sequenza di *premi* (in particolare, un *premio unico*)

In uscita: *benefici* e *spese*

Molti elementi dei flussi di cassa sono:

- differiti (cioè pagati / incassati dopo la stipulazione del contratto)
- aleatori, in quanto dipendenti dalla durata di vita dell'assicurato

Esempio

Flussi di cassa in un contratto assicurativo

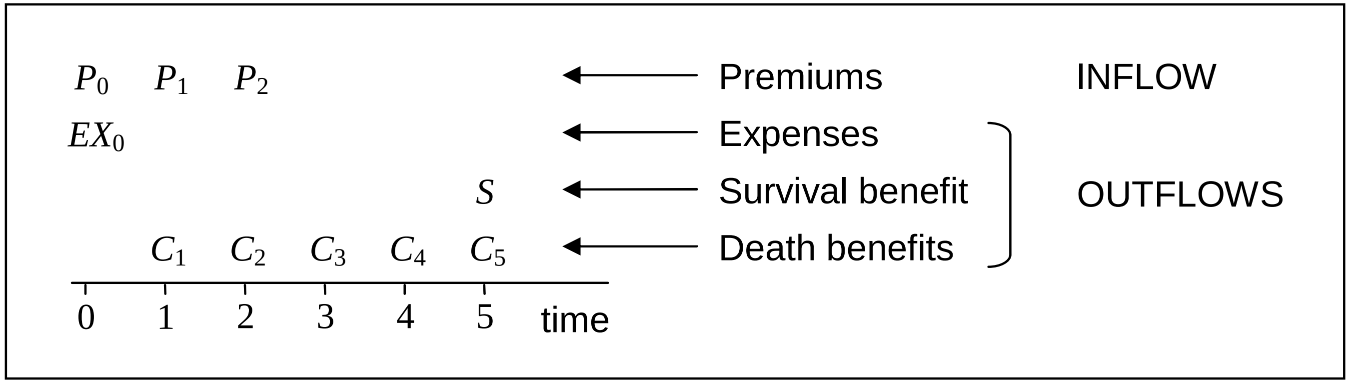
- Benefici:
  - C_h, $h = 1, 2, \ldots, 5$ pagato al tempo h se l'assicurato muore tra $h - 1$ e h $\Rightarrow$ C_h *benefici caso morte*
  - S pagato al tempo 5 (scadenza) se l'assicurato è in vita a scadenza; $\Rightarrow$ S *beneficio caso vita*
- Spesa EX_0 pagata alla stipulazione del contratto, cioè in $t = 0$
- Premi P_0, P_1, P_2 incassati in $t = 0, 1, 2$; P_1, P_2 incassati se assicurato in vita in $t = 1$ e $t = 2$ rispettivamente

Nota: solo P_0 e EX_0 sono immediati e quindi certi
Vedi Figura

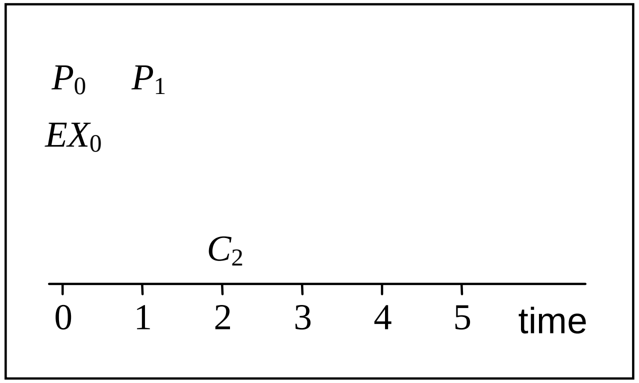
Possibili realizzazioni dei flussi di cassa (vedi Figure seguenti)

(a) in caso di decesso nel secondo anno

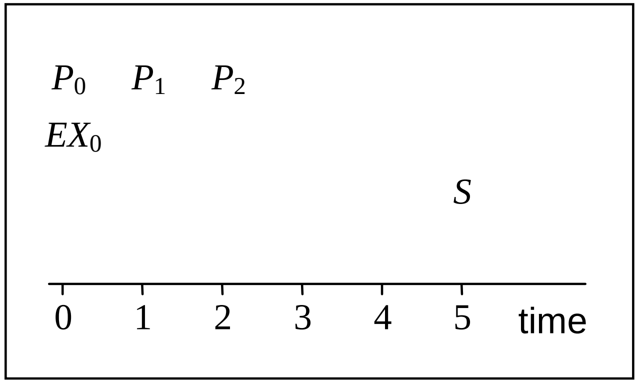
(b) in caso di vita a scadenza



Flussi di cassa in un contratto assicurativo vita



(a)



(b)

Possibili realizzazioni dei flussi di cassa

Nel seguito:

- flussi in uscita originati dai benefici
- (inizialmente) trascureremo le spese

Istante di stipulazione del contratto $t = 0$

Anno come unità di misura del tempo

Calcolo di valori attuariali (cioè valori attuali attesi) dei flussi di cassa

Scelta della base tecnica

- ▷ tasso i
- ▷ tavola $\{\ell_x\}$

irrilevante, in quanto ora consideriamo solo strutture formali; rilevante quando si usano le formule per calcolo di premi, riserve, utili attesi, ecc.

BENEFICIO IN CASO MORTE

Beneficio: importo C pagato al tempo h al beneficiario se l'assicurato, di età x all'ingresso in assicurazione (stipulazione del contratto), decede tra $h-1$ e h (nell'h-esimo anno di contratto)

Notazione:

- Y = valore attuale aleatorio (al tempo 0) del beneficio
- K_x = durata residua di vita troncata
- i = tasso di'interesse per l'attualizzazione

Quindi

$$Y = \begin{cases} C\,(1+i)^{-h} & \text{se } K_x = h-1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Inoltre, ${}_{h-1|1}q_x$ = probabilità di decesso nell'anno h

Valore attuale atteso:

$$\mathbb{E}[Y] = C\,(1+i)^{-h}\;{}_{h-1|1}q_x$$

Beneficio in caso vita

Beneficio: importo S al tempo m pagato al beneficiario (l'assicurato in particolare) se l'assicurato è in vita in m

Sia Y il valore attuale aleatorio (al tempo 0) del beneficio

$$Y = \begin{cases} S\,(1+i)^{-m} & \text{se } K_x \geq m \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Inoltre, ${}_mp_x$ = probabilità di essere in vita al tempo m

Valore attuale atteso del beneficio:

$$\mathbb{E}[Y] = S\,(1+i)^{-m}\,{}_mp_x$$

BENEFICI COMBINATI

Formule precedenti: punto di partenza per valori attuali aleatori ed attesi di più complesse strutture di benefici

Esempio 1

Benefici:

- importo C_h pagato in h al beneficiario se l'assicurato decede tra $h-1$ e h, $h = 1, 2, \ldots, m$ (m = scadenza)
- importo S pagato in m ai beneficiari (l'assicurato in particolare) se l'assicurato è in vita a scadenza

Valore attuale aleatorio dei benefici:

$$Y = \begin{cases} C_1\,(1+i)^{-1} & \text{se } K_x = 0 \\ C_2\,(1+i)^{-2} & \text{se } K_x = 1 \\ \quad\ldots & \quad\ldots \\ C_m\,(1+i)^{-m} & \text{se } K_x = m-1 \\ S\,(1+i)^{-m} & \text{se } K_x \geq m \end{cases}$$

Valore attuale atteso dei benefici:

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{h=1}^{m} C_h \, (1+i)^{-h} \; {}_{h-1|1}q_x + S\,(1+i)^{-m} \; {}_{m}p_x \qquad (^\circ)$$

Esempio 2

Combinazione di benefici caso vita $\Rightarrow$ flussi di cassa delle *rendite vitalizie*

Beneficio: S pagato all'assicurato ("vitaliziato"), in $1, 2, \dots,$ mentre in vita

Valore attuale aleatorio dei benefici:

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{se } K_x = 0 \\ S\,(1+i)^{-1} & \text{se } K_x = 1 \\ S\,(1+i)^{-1} + S\,(1+i)^{-2} & \text{se } K_x = 2 \\ S\,(1+i)^{-1} + S\,(1+i)^{-2} + S\,(1+i)^{-3} & \text{se } K_x = 3 \\ \quad \dots & \quad \dots \end{cases}$$

Secondo la notazione della matematica finanziaria:

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{se } K_x = 0 \\ S\, a_{\overline{1}|} & \text{se } K_x = 1 \\ S\, a_{\overline{2}|} & \text{se } K_x = 2 \\ S\, a_{\overline{3}|} & \text{se } K_x = 3 \\ \quad \dots & \quad \dots \end{cases}$$

In termini compatti:

$$Y = S\, a_{\overline{K_x}|}$$

Valore attuale atteso:

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[S\, a_{\overline{K_x}|}] = S \sum_{h=1}^{\omega - x} a_{\overline{h}|}\ {}_{h|1}q_x \qquad (*)$$

Espressione alternativa per il valore attuale atteso:

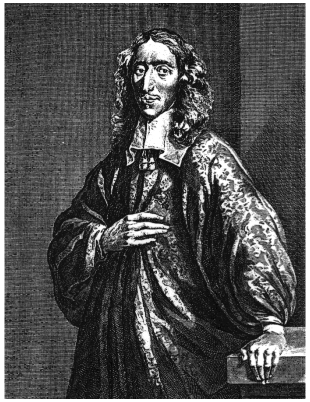
$$\mathbb{E}[Y] = S\,(1+i)^{-1}\,{}_1p_x + S\,(1+i)^{-2}\,{}_2p_x + S\,(1+i)^{-3}\,{}_3p_x + \ldots \qquad (^{**})$$

basata sull'identità

$${}_kp_x = \sum_{h=k}^{\omega-x} {}_{h|1}q_x$$

Osservazione 1

Formula $(*)$ *proposta nel 1671 dal primo ministro olandese Jan de Witt; interessante per sviluppi ulteriori, in quanto riferita al numero aleatorio* K_x
($\Rightarrow$ *varianza, altri momenti, ecc.)*



Formula $(**)$ *proposta nel 1693 da Edmond Halley; calcolo più agevole*

Due tra le più antiche formule attuariali (tuttora in uso)

Osservazione 2

Esempio 1, Esempio 2: benefici assicurati rappresentati come "combinazioni" di benefici "elementari" (beneficio caso morte monoannuale e beneficio caso vita)

Valori attuariali espressi in termini dei valori attuariali di benefici elementari, precisamente come combinazioni lineari: possibilità basata sulla linearità dell'operatore valore atteso (vedi formule $(^\circ)$ e $(^{**})$)

VALORI ATTUARIALI: TERMINOLOGIA E NOTAZIONE

Valori attuariali fondamentali

Assicurazione di capitale differito

Beneficio: 1 unità monetaria al tempo m se assicurato (età corrente x) in vita ad età $x+m$

Valore attuariale:

$$_{m}E_{x} = (1+i)^{-m}\,{}_{m}p_{x}$$

Rendita vitalizia illimitata (anticipata)

Beneficio: sequenza di importi unitari, pagabili all'inizio di ciascun anno mentre l'assicurato è in vita

Valore attuariale:

$$\ddot{a}_{x} = \sum_{h=0}^{\omega-x} {}_{h}E_{x}$$

Rendita vitalizia temporanea (anticipata)

Beneficio: sequenza di importi unitari, pagabili all'inizio di ciascun anno mentre l'assicurato è in vita, per al più m anni

Valore attuariale:

$$\ddot{a}_{x:\overline{m}|} = \sum_{h=0}^{m-1} {}_hE_x$$

Rendita vitalizia differita (anticipata)

Beneficio: sequenza di importi unitari, pagabili all'inizio di ciascun anno mentre l'assicurato è in vita, ma iniziando dal tempo r

Valore attuariale:

$$_{r|}\ddot{a}_x = \sum_{h=r}^{\omega-x} {}_hE_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{r}|}$$

Rendita vitalizia differita temporanea (anticipata)

Combinando le precedenti restrizioni:

$$ {}_{r|}\ddot{a}_{x:m\rceil} = \ddot{a}_{x:r+m\rceil} - \ddot{a}_{x:r\rceil} $$

Rendite vitalizie posticipate

Beneficio: importi unitari, pagabili alla fine di ciascun anno

$$ a_x = \sum_{h=1}^{\omega-x} {}_hE_x = \ddot{a}_x - 1 $$

$$ a_{x:m\rceil} = \sum_{h=1}^{m} {}_hE_x $$

$$ {}_{r|}a_x = \sum_{h=r+1}^{\omega-x} {}_hE_x = a_x - a_{x:r\rceil} $$

$$ {}_{r|}a_{x:m\rceil} = a_{x:r+m\rceil} - a_{x:r\rceil} $$

Assicurazione temporanea caso morte

Beneficio: importo unitario pagabile alla fine dell'anno di decesso, se il decesso si verifica entro m anni (m = scadenza contrattuale)

Valore attuariale:

$$ {}_mA_x = \sum_{h=0}^{m-1} \underbrace{(1+i)^{-(h+1)}\ {}_{h|1}q_x}_{{}_{h|1}A_x} $$

Assicurazione a vita intera caso morte

Beneficio: importo unitario pagabile alla fine dell'anno di decesso, in qualsiasi anno si verifichi

Valore attuariale:

$$ A_x = \sum_{h=0}^{\omega-x} {}_{h|1}A_x $$

Benefici caso morte limitati a intervalli di tempo che iniziano dopo un periodo di r anni (*periodo di differimento*) dalla stipulazione del contratto

Valori attuariali:

$$ {}_{r|m}A_x = \sum_{h=r}^{r+m-1} {}_{h|1}A_x $$

$$ {}_{r|}A_x = \sum_{h=r}^{\omega-x} {}_{h|1}A_x $$

Ovviamente:

$$ A_x = {}_{r}A_x + {}_{r|}A_x $$

Assicurazione mista (ordinaria)

Beneficio: importo unitario alla fine dell'anno di decesso, se questo si verifica prima della scadenza m, o in m in caso vita $\Rightarrow$ combinazione dei benefici dell'assicurazione di capitale differito e della temporanea caso morte

Valore attuariale:

$$A_{x,m\rceil} = {}_mE_x + {}_mA_x$$

Valori attuariali di benefici variabili

Rendite vitalizie con rate crescenti aritmeticamente

Rate:

$$b + k, b + 2\,k, b + 3\,k, \ldots$$

Valore attuariale della rendita vitalizia anticipata immediata illimitata, con $b = 0$, $k = 1$:

$$(I\ddot{a})_x = \sum_{h=0}^{\omega-x} (h+1)\,{}_hE_x = \sum_{h=0}^{\omega-x} {}_{h|}\ddot{a}_x$$

Valore attuariale con b, k qualsiasi:

$$b\,\ddot{a}_x + k\,(I\ddot{a})_x$$

Assicurazione a vita intera caso morte con capitale crescente aritmeticamente

Capitale: $1, 2, 3, \ldots$

Valore attuariale:

$$(IA)_x = \sum_{h=0}^{\omega-x} (h+1)\, {}_{h|1}A_x = \sum_{h=0}^{\omega-x} {}_{h|}A_x$$

Assicurazione a temporanea caso morte con capitale crescente aritmeticamente

Capitale: $1, 2, 3, \ldots$

Valore attuariale:

$${}_m(IA)_x = \sum_{h=0}^{m-1} (h+1)\, {}_{h|1}A_x = \sum_{h=0}^{m-1} {}_{h|m-h}A_x$$

Valori attuariali "aggiustati"

Valori attuariali che tengono conto (approssimativamente) del pagamento del beneficio caso morte subito dopo il decesso (anziché alla fine dell'anno di decesso)

Ipotesi: distribuzione di probabilità uniforme dell'istante di decesso entro ciascun anno di contratto

Definizione:

$$ {}_{h|1}\bar{A}_x = (1+i)^{-\left(h+\frac{1}{2}\right)} {}_{h|1}q_x = {}_{h|1}A_x \, (1+i)^{\frac{1}{2}} $$

Allora:

$$ {}_m\bar{A}_x = {}_mA_x \, (1+i)^{\frac{1}{2}} $$

$$ \bar{A}_x = A_x \, (1+i)^{\frac{1}{2}} $$

$$ \bar{A}_{x,m\rceil} = {}_mE_x + {}_m\bar{A}_x $$

VALORI ATTUARIALI: DISUGUAGLIANZE

Si considerino i valori

$$A_x,\ {}_mA_x,\ A_{x,m\rceil},\ {}_mE_x,\ (1+i)^{-m}$$

Problema: stabilire un ordinamento tra tali valori $\Rightarrow$ data una coppia di valori, stabilire (se possibile) quale disuguaglianza sussiste per ogni x, ogni m, e qualsiasi base tecnica i, $\{\ell_x\}$

Risulta:

$${}_mA_x \leq A_x \leq A_{x,m\rceil}; \quad {}_mE_x \leq (1+i)^{-m} \leq A_{x,m\rceil}$$

Notare che:

- ${}_mA_x \leq A_x$, in quanto il beneficio della temporanea caso morte è una “parte” del beneficio della vita intera caso morte; in pratica ${}_mA_x < A_x$, se x e m sono non troppo elevati

- $A_x \leq A_{x,\overline{m}|}$, in quanto la mista paga il beneficio non più tardi della vita intera caso morte; in particolare, $A_x = A_{x,\overline{m}|} = 1$ se $i = 0$, perché il pagamento del beneficio è certo in entrambi i prodotti, essendo aleatorio solo l'istante di pagamento
- ${}_mE_x \leq (1+i)^{-m}$, in quanto il beneficio dell'assic. di capitale differito è pagato se e solo se l'assicurato è in vita alla scadenza m; in pratica ${}_mE_x < (1+i)^{-m}$
- $(1+i)^{-m} \leq A_{x,\overline{m}|}$, in quanto l'assicurazione mista paga il beneficio al tempo m al più tardi

Esempio di non confrontabilità:

$$A_x \gtrless (1+i)^{-m}$$

per esempio, con $m = 20$:

- ▷ se $x = 90 \Rightarrow$ verosimile $A_{90} > (1+i)^{-20}$
- ▷ se $x = 30 \Rightarrow$ verosimile $A_{30} < (1+i)^{-20}$

VALORI ATTUARIALI A TASSO NULLO

Tasso nullo (cioè nessun valore temporale attribuito al denaro)
$\Rightarrow$ valori attuariali dipendenti solo dalla distribuzione di probabilità della durata di vita

Esempi:

$$ {}_mA_x = \sum_{h=0}^{m-1} {}_{h|1}q_x = {}_mq_x $$

$$ {}_mE_x = {}_mp_x $$

Valore attuariale di una rendita vitalizia illimitata:

$$ a_x = \sum_{h=1}^{\omega-x} {}_hp_x $$

allora:

$$ \overset{\circ}{e}_x = a_x + \tfrac{1}{2} $$

Probabilità non influiscono sul valore attuariale se il pagamento del beneficio è certo

Esempi: assicurazione a vita intera caso morte e assicurazione mista

$$A_x = \sum_{h=0}^{\omega-x} {}_{h|1}q_x = 1$$

$$A_{x,m\rceil} = \sum_{h=0}^{m-1} {}_{h|1}q_x + {}_m p_x = {}_m q_x + {}_m p_x = 1$$

Fattori di attualizzazione e di capitalizzazione attuariale

Si consideri il valore attuariale ${}_{r|}A_x$, espresso come segue:

$$ {}_{r|}A_x = \sum_{h=r}^{\omega-x} {}_{h|1}A_x = \sum_{h=r}^{\omega-x} (1+i)^{-(h+1)} \; {}_{h|1}q_x $$

Quindi:

$$ {}_{r|}A_x = (1+i)^{-r} \; {}_{r}p_x \sum_{h=0}^{\omega-x-r} (1+i)^{-(h+1)} \; {}_{h|1}q_{x+r} $$

e infine:

$$ {}_{r|}A_x = {}_{r}E_x \; A_{x+r} \qquad (*) $$

In $(^*)$, ${}_rE_x$ ha il ruolo di *fattore di attualizzazione attuariale* (o *di sconto attuariale*) per r anni (ad età x):

Notare che:

- ${}_rE_x$ = valore attuariale in 0 (età x) di 1 unità pagabile in r (età $x+r$) in caso vita
- $\dfrac{1}{{}_rE_x}$ = importo pagabile in r, il cui valore attuariale in 0 è 1 unità

Quindi, $\dfrac{1}{{}_rE_x}$ può essere interpretato come *fattore di capitalizzazione attuariale* (o *di montante attuariale*) per r anni (ad età x)

Relazioni analoghe:

$$
{}_{r+m}E_x = {}_rE_x \; {}_mE_{x+r}
$$

$$
{}_{r|}\ddot{a}_x = {}_rE_x \; \ddot{a}_{x+r}
$$

Osservazione

Tutte le relazioni di fattorizzazione si basano, ovviamente, sull'ipotesi che la stessa base tecnica sia usata nei vari valori attuariali

- ▷ in pratica ciò può non essere sensato, in particolare per lunghi intervalli $(0, r)$

UNA RELAZIONE NOTEVOLE

Rendita perpetua: sequenza infinita di importi

Riferimento a importi annuali anticipati

Valore attuale, per $i > 0$, dato da:

$$\ddot{a}_{\infty\rceil} = 1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \cdots = \frac{1+i}{i}$$

Sia d il *tasso di sconto* (o *tasso di interesse anticipato*), $d = \dfrac{i}{1+i}$;

quindi:

$$\ddot{a}_{\infty\rceil} = \frac{1}{d} \qquad (*)$$

Risulta ovviamente:

$$\ddot{a}_x < \ddot{a}_{\infty\rceil}$$

Si ha inoltre:

rendita perpetua $=$ rendita vitalizia $+$

rendita perpetua differita con inizio alla fine dell'anno di decesso

quindi:

$$\ddot{a}_{\infty\rceil} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_{\infty\rceil}\, A_x$$

e mediante la $(*)$:

$$1 = d\,\ddot{a}_x + A_x$$

Interpretazione:

Ammortamento vitalizio di un debito di ammontare 1 (contratto al tempo 0) consistente in

- interessi annui anticipati d (rendita vitalizia)
- pagamento del capitale 1 alla fine dell'anno di decesso

VALORI ATTUARIALI IN ISTANTI SEGUENTI LA STIPULAZIONE DEL CONTRATTO

Valori attuariali finora riferiti al tempo 0 (stipulazione del contratto) $\Rightarrow$ calcolo del premio

Valori in tempi (interi) t seguenti la stipulazione, cioè *anniversari di contratto*, anche di interesse pratico $\Rightarrow$ calcolo di riserve

Intervallo di tempo tra stipulazione e generico istante t: *antidurata*

Valori attuariali al tempo t $\Rightarrow$ ipotesi: assicurato in vita in t

Se assicurato di età x all'ingresso in assicurazione

- durata aleatoria residua di vita (troncata) K_{x+t}
- impiego di probabilità riferite all'età $x+t$ (es. q_{x+t}, ${}_m p_{x+t}$)

Esempi

- valore attuariale in t di un'assicurazione temporanea caso morte di m anni, con somma assicurata unitaria:

$$ {}_{m-t}A_{x+t} = \sum_{h=0}^{m-t-1} {}_{h|1}A_{x+t} = \sum_{h=0}^{m-t-1} (1+i)^{-(h+1)} \, {}_{h|1}q_{x+t} $$

- valore attuariale in t di un'assicurazione di capitale differito con scadenza m:

$$ {}_{m-t}E_{x+t} = (1+i)^{-(m-t)} \, {}_{m-t}p_{x+t} $$

- valore attuariale in t di una rendita vitalizia immediata illimitata anticipata:

$$ \ddot{a}_{x+t} = \sum_{h=0}^{\omega-x-t} {}_{h}E_{x+t} $$

4.3 PREMI UNICI

Flusso di cassa in entrata originato da contratto assicurativo può ridursi al *premio unico*, incassato alla stipulazione del contratto

PRINCIPIO DI EQUITÀ

Riferimento a un generico contratto; siano:

- Y il valore attuale aleatorio dei benefici
- Π il premio unico
- Z il valore attuale aleatorio del risultato per l'assicuratore (utile o perdita)

$$Z = \Pi - Y$$

Principio di equità $\Rightarrow$ Π tale che

$$\mathbb{E}[Z] = 0$$

quindi:

$$\Pi = \mathbb{E}[Y]$$

Caricamento di sicurezza incluso nel premio, al fine di:

1. fornire all'assicuratore un risultato atteso positivo
2. far fronte ad andamenti sfavorevoli di
   (a) rendimento degli investimenti
   (b) mortalità degli assicurati

Caricamento direttamente incluso nel calcolo del premio: *caricamento di sicurezza implicito*

Flussi di cassa attualizzati adottando

- un "appropriato" tasso di interesse i'
- un'"appropriata" tavola di mortalità (probabilità di decesso q', o sopravvivenza p')

che costituiscono la *base tecnica di primo ordine* (o *base prudenziale*, o *pricing basis*)

Scelta della base di primo ordine:

- tasso i' minore del tasso stimato di rendimento degli investimenti
- tavola di mortalità dipendente dal tipo di benefici (caso morte, caso vita, combinazioni)

Tavole negli esempi numerici costruite in base alla (prima) legge di Heligman-Pollard

$$\frac{q_x}{1-q_x} = \underbrace{A^{(x+B)^C}}_{\text{mortalità infantile}} + \underbrace{D\,\mathrm{e}^{-E(\ln x - \ln F)^2}}_{\text{mortalità giovanile (accidentale)}} + \underbrace{G\,H^x}_{\text{mortalità adulta e senile}}$$

Tavole LT seguenti: vari parametri alternativi e corrispondenti valori sintetici della durata di vita

	A	B	C	D	E	F	G	H
LT1	0.00054	0.01700	0.10100	0.00016	10.72	18.67	1.83000 E$-$05	1.11000
LT2	0.00054	0.01700	0.10100	0.00014	10.72	18.67	1.64700 E$-$05	1.11000
LT3	0.00054	0.01700	0.10100	0.00013	10.72	18.67	1.46400 E$-$05	1.11000
LT4	0.00054	0.01700	0.10100	0.00014	10.72	18.67	2.00532 E$-$06	1.13025
LT5	0.00054	0.01700	0.10100	0.00014	10.72	18.67	1.06038 E$-$06	1.13705

Parametri della prima legge di Heligman-Pollard

	$\mathring{e}_0$	$\mathring{e}_{40}$	$\mathring{e}_{65}$	Lexis	q_0	q_{40}	q_{80}
LT1	77.282	38.601	16.725	83	0.00684	0.00121	0.07178
LT2	78.288	39.568	17.485	84	0.00684	0.00109	0.06507
LT3	79.412	40.653	18.352	85	0.00684	0.00097	0.05826
LT4	85.128	46.133	22.350	90	0.00682	0.00029	0.03475
LT5	86.464	47.446	23.389	91	0.00682	0.00020	0.02984

Valori sintetici della durata di vita (prima legge di Heligman-Pollard)

Interpretazione

- $\mathrm{LT1}$: tavola di popolazione (costruita come tavola di periodo); scelta prudenziale per assicurazioni con beneficio caso morte; utilizzabile anche per rappresentare una debole autoselezione
- $\mathrm{LT2}$ e $\mathrm{LT3}$: tavole di mercato (costruite come tavole di periodo), relative alla mortalità di assicurati

  processo di selezione sottostante la $\mathrm{LT3}$ verosimilmente più severo di quello (eventuale) sottostante la $\mathrm{LT2}$
- $\mathrm{LT4}$ e $\mathrm{LT5}$: tavole di generazione, estratte da tavole proiettate, rappresentanti due ipotesi di miglioramento della mortalità, più debole e più forte rispettivamente; da adottare per rendite vitalizie

Osservazione 1

Valori attuariali per il calcolo di premi denotati con ${}_mE'_x$, ${}_mA'_x$, a'_x, $\ldots$, per segnalare uso della base di primo ordine

Osservazione 2

TB denota una generica base tecnica; $\mathrm{TB1}$ la base di primo ordine, $\mathrm{TB2}$ la base di secondo ordine; esempio: $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT4})$ significa $i' = 0.02$ e la tavola di mortalità $\mathrm{LT4}$

ASSICURAZIONE DI CAPITALE DIFFERITO

Beneficio: importo, S, al tempo m (scadenza), se assicurato in vita a scadenza

Premio unico:

$$\Pi = S \; {}_mE'_x = S \, (1 + i')^{-m} \; {}_mp'_x$$

${}_mE'_x$ = premio unico per 1 unità monetaria, spesso chiamato “tasso di premio” (dell’assic. di capitale differito)

Osservazione

Prodotto non molto comune, in quanto il beneficio è pagato solo in caso di vita a a scadenza, mentre il premio è comunque elevato (alta probabilità di sopravvivenza per età e durate usuali)

Prodotto più comune: assicurazione di capitale differito combinato con beneficio di *controassicurazione*, cioè rimborso del premio in caso di decesso prima della scadenza. Il premio è aumentato per finanziare anche questo beneficio “complementare”

Esempio 1

Tabelle seguenti:

- effetto di età e durata sul premio unico dell’assic. di capitale differito
- effetto della scelta della base tecnica $\mathrm{TB1}$ sul premio unico del capitale differito

x	$m=5$	$m=10$	$m=15$
40	898.97	804.08	713.10
45	894.44	793.24	693.49
50	886.86	775.33	661.73
55	874.25	746.15	611.70
60	853.48	699.69	536.39

Premio unico di un'assic. di capitale differito; $S = 1\,000$, $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$

Tavola	$i'=0$	$i'=0.01$	$i'=0.02$	$i'=0.03$
LT1	966.96	875.37	793.24	719.51
LT2	970.19	878.30	795.90	721.91
LT3	973.44	881.24	798.56	724.33
LT4	990.76	896.93	812.77	737.22
LT5	993.34	899.26	814.88	739.14

Premio unico di un'assic. di capitale differito; $S = 1\,000$, $x = 45$, $m = 10$

Esempio 2

Tabella seguente: confronto tra il premio unico di un'assicurazione di capitale differito ed il valore attuale di un capitale differito certo a scadenza

In particolare

- righe corrispondenti a $i = 0, 0.01, 0.02, 0.03 \;\Rightarrow\;$ effetto della mortalità, se confrontate con le corrispondenti colonne della tabella precedente
- $i = 0.02343 \;\Rightarrow\;$ valore attuale uguale al premio unico di un'assic. di capitale differito con $x = 45$, $m = 10$, e $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$

i	$1\,000\,(1+i)^{-10}$
0	1 000.00
0.01	905.29
0.02	820.35
0.02343	793.24
0.03	744.09
0.04	675.56
0.05	613.91

Valore attuale di un capitale certo al tempo m*;* $S = 1\,000$, $m = 10$

Calcolo del premio unico di un’assic. di capitale differito basato su:

- componente “finanziaria” (tasso d’interesse i')
- componente “mortalità” (probabilità p')

Caratteristica comune a tutti i prodotti assicurativi

Per alcuni prodotti (es. assic. di capitale differito), è interessante esprimere l’effetto congiunto delle due componenti mediante un tasso di attualizzazione (finanziaria) “equivalente”

Effetto della componente mortalità dipendente da età dell’assicurato e durata del contratto
$\Rightarrow$ sia $g_{x,m}$ il tasso equivalente:

$$(1 + g_{x,m})^{-m} = (1 + i')^{-m} \, {}_m p'_x$$

Ovviamente ${}_m p'_x < 1 \;\Rightarrow\; g_{x,m} > i'$

Interpretazione dello spread $g_{x,m} - i'$:

1. per una data somma assicurata S e un dato tasso i', il valore attuariale dipende (anche) dalla mortalità attesa nel portafoglio (effetto mutualità)
2. premio Π minore del valore attuale (allo stesso tasso) dell'importo S pagato certamente a scadenza
3. se una persona vuole investire Π in un'operazione puramente finanziaria con capitale S a scadenza, occorre un rendimento maggiore di i' per "recuperare" l'effetto mutualità; infatti:
$$\Pi\,(1+i')^m \,\frac{1}{{}_mp'_x} = S \quad \Rightarrow \quad \Pi\,(1+i')^m < S$$
quindi:
$$\Pi\,(1+g_{x,m})^m = S \quad \Rightarrow \quad g_{x,m} > i'$$
4. lo spread $g_{x,m} - i'$ recupera l'effetto mutualità (*mortality credits*)

x	$m = 5$	$m = 10$	$m = 15$
40	0.02153	0.02205	0.02280
45	0.02256	0.02343	0.02470
50	0.02430	0.02577	0.02791
55	0.02724	0.02972	0.03331
60	0.03219	0.03636	0.04240

Tassi "equivalenti" $g_{x,m}$*;* $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$

RENDITE VITALIZIE

Beneficio: sequenza di importi periodici (rate), pagati a condizione che l'assicurato sia in vita

Frequenza di pagamento: mensile, trimestrale, semestrale, o annuale. Consideriamo il solo caso di rate annuali

Tipi di rendite vitalizie:

- *rendite vitalizie volontarie*: acquistate come conseguenza di una scelta individuale
- *pensioni*:
  - rendite vitalizie pagate a una persona come conseguenza della sua appartenenza a un fondo pensioni aziendale
  - rendite vitalizie acquistate in base a obblighi di legge

Stessa struttura tecnica, ma più elevato effetto di autoselezione nelle rendite volontarie (effetto da considerare nella scelta della base tecnica)

Profilo temporale delle rate

- *Rendite costanti*: rata annuale b costante in termini nominali
- *Rendite crescenti a tasso costante*:
  - ▷ rate annuali aritmeticamente crescenti ad un dato tasso α
    $\Rightarrow$ sequenza di rate:
    $$b_1, \quad b_2 = (1+\alpha)\, b_1, \quad b_3 = (1+2\,\alpha)\, b_1, \; \ldots$$
  - ▷ rate annuali geometricamente crescenti ad un dato tasso α
    $\Rightarrow$ sequenza di rate:
    $$b_1, \quad b_2 = (1+\alpha)\, b_1, \quad b_3 = (1+\alpha)^2\, b_1, \; \ldots$$
- *Rendite collegate a indici*: rate annuali variabili in funzione di
  - ◦ indice di inflazione
  - ◦ indici azionari
  - ◦ meccanismi di partecipazione a utili
  - ◦ … …

Rendita vitalizia immediata posticipata, con rate costanti

Premio Π, secondo il principio di equità:

$$\Pi = b\, a'_x = b \sum_{h=1}^{\omega-x} {}_hE'_x = b \sum_{h=1}^{\omega-x} (1+i')^{-h}\, {}_hp'_x$$

Esempio

Tabella seguente: premio unico in funzione della base tecnica $\mathrm{TB1}$

Tavola	$i' = 0$	$i' = 0.01$	$i' = 0.02$	$i' = 0.03$
LT1	1 622.55	1 462.05	1 325.15	1 207.62
LT2	1 698.55	1 524.98	1 377.64	1 251.72
LT3	1 785.24	1 596.23	1 436.66	1 300.97
LT4	2 185.04	1 923.61	1 706.88	1 525.74
LT5	2 288.92	2 007.36	1 774.94	1 581.51

Premio unico di una rendita vitalizia immediata posticipata; $b = 100$, $x = 65$

Rendita vitalizia “completa”

Rendita vitalizia posticipata con pagamento finale proporzionale al tempo trascorso tra l’ultima rata ed il decesso. Premio unico approssimativamente dato da:

$$\Pi = b\, a'_x + \frac{b}{2}\, \bar{A}'_x$$

Rendita vitalizia anticipata

Premio unico:

$$\Pi = b\, \ddot{a}'_x = b\, (a'_x + 1)$$

Rendita vitalizia differita

Più lungo differimento $\Rightarrow$ maggiore rischio dell’assicuratore, in particolare per inattesi miglioramenti della mortalità, se la base tecnica è stabilita alla stipulazione del contratto

$\Rightarrow$ attualmente, un prodotto “difficile”

Rendita vitalizia temporanea

Premio unico per temporaneità m anni:

$$\mathit{\Pi} = b\, a'_{x:\overline{m}|}$$

- ▷ rendita vitalizia differita $\Rightarrow$ maggiore esposizione ai rischi rispetto alla vitalizia immediata
- ▷ rendita vitalizia (immediata) temporanea $\Rightarrow$ minore esposizione ai rischi (longevità in particolare) rispetto alla vitalizia immediata (non temporanea)

	$m = 10$	$m = 15$	$m = 20$	$m = 25$
$b\, a'_{x:\overline{m}|}$	858.51	$1\,183.97$	$1\,430.34$	$1\,591.83$
$a'_{x:\overline{m}|}/a'_x$	0.5030	0.6937	0.8380	0.9326

Rendita vitalizia temporanea; $b = 100$, $x = 65$; $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT4})$

Rendita vitalizia "old-age"

Rendita vitalizia immediata pagata a partire da un'età y successiva al pensionamento

Scopi:

- ▷ ridurre il premio rispetto a una rendita tradizionale (es. da 65 anni)
- ▷ da investimento ad assicurazione contro il rischio di longevità individuale (esaurimento delle risorse disponibili)

	$y = 75$	$y = 80$	$y = 85$
$b\, a'_y$	$1\,149.19$	886.25	650.23
a'_y / a'_x	0.6733	0.5192	0.3809

Rendita vitalizia "old-age"; $b = 100$, $x = 65$; $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT4})$

Osservazione

Rendita vitalizia temporanea e rendita vitalizia “old-age” $\Rightarrow$ *restrizioni* dell’intervallo di età coperto dai benefici di rendita

In particolare:

- ▷ rendita vitalizia temporanea $\Rightarrow$ *massimale* sulla durata di pagamento
- ▷ rendita vitalizia “old-age” $\Rightarrow$ *franchigia*, cioè esclusione dell’intervallo dall’età di pensionamento all’età di (eventuale) inizio pagamento rendita

RENDITE VITALIZIE: ULTERIORI ASPETTI

Caratteristiche dei prodotti di rendita vitalizia

1. La rendita vitalizia è basata sul meccanismo di mutualità; quindi:
   (a) importi (riserve) rilasciati dagli assicurati che decedono ripartiti tra assicurati ancora in vita
   (b) al decesso dell'assicurato, nulla è accreditato a eredi
2. Una rendita vitalizia dà una sequenza di pagamenti "non flessibile": gli importi incassati dell'assicurato devono essere in linea con il profilo temporale delle rate come stabilito dal contratto
3. L'acquisto di una rendita vitalizia è una decisione irreversibile: il riscatto è generalmente vietato (possibile antiselezione !)

Caratteristiche 2 e 3 $\Rightarrow$ la rendita vitalizia è un asset illiquido

Caratteristiche 1(b), 2 e 3: possono essere percepite come svantaggi

$\Rightarrow$ Indebolimento della propensione a convertire in rendita l'intero ammontare accumulato disponibile al momento di pensionamento

Svantaggi riducibili mediante:

- acquisto di particolari prodotti di rendita vitalizia, ad esempio con benefici complementari:
  - ▷ rendita vitalizia con rate garantite
  - ▷ rendita vitalizia con "capital protection"
- adozione di una specifica strategia di conversione in rendita
  - ▷ esempio: processo di prelevamento e quindi acquisto di una rendita "old-age"

Rendita vitalizia con rate garantite

Rate annuali pagate per un periodo prefissato (es. 5 o 10 anni) indipendentemente dalla durata di vita dell'assicurato

Per un periodo garantito di s anni, valore attuariale di una rendita con beneficio unitario:

$$a_{\overline{x:\, s\rceil}} = a_{s\rceil} + {}_{s|}a_x$$

con $a_{s\rceil}$ = valore attuale di una rendita certa temporanea s anni (allo stesso tasso di interesse della rendita differita)

Essendo (con $s > 0$)

$$a_{s\rceil} > a_{x:s\rceil}$$

risulta:

$$a_{\overline{x:\, s\rceil}} > a_{x:\, s\rceil} + {}_{s|}a_x = a_x$$

Premio unico per un beneficio annuo b

$$\Pi = b\, a'_{\overline{x:\,s}\rceil}$$

	Numero rate garantite		
	$s = 0$	$s = 5$	$s = 10$
$x = 65$	$1\,706.88$	$1\,716.25$	$1\,746.67$
$x = 70$	$1\,426.43$	$1\,443.47$	$1\,497.53$

Premio unico Π ad età x; $b = 100$; $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT4})$

Nota:

- ▷ con $s = 0 \;\Rightarrow\; a_{\overline{x:\,s}\rceil} = a_x$
- ▷ con $s > 0 \;\Rightarrow\;$ differenza $a_{\overline{x:\,s}\rceil} - a_x$ modesta, data la bassa mortalità negli intervalli di età coinvolti

"Capital protection" (o "Money-back" life annuity)

In caso di decesso dell'assicurato entro un fissato numero di anni dall'inizio di pagamento della rendita, la differenza (se positiva) tra il premio unico e la somma delle rate pagate, è pagata al beneficiario designato ($\Rightarrow$ forma di controassicurazione)

La capital protection si estingue solitamente ad una data età limite $\xi = x + n$ (es. $\xi = 75$), dopo la quale nulla è pagato anche se la differenza suddetta è positiva

In caso di decesso tra l'istante h e $h+1$, pagamento dell'importo $\mathit{\Gamma}_h$:

$$\mathit{\Gamma}_h = \max\{\mathit{\Pi} - h\,b, 0\}; \quad h = 0, 1, \ldots, n-1$$

dove:

$$\mathit{\Pi} = b\,a'_x + \left(\mathit{\Gamma}_0\;{}_{0|1}A'_x + \mathit{\Gamma}_1\;{}_{1|1}A'_x + \cdots + \mathit{\Gamma}_{n-1}\;{}_{n-1|1}A'_x\right)$$

	Età limite		
	$\xi = 70$	$\xi = 75$	$\xi = 80$
$x = 65$	$1\,759.53$	$1\,821.22$	$1\,880.66$
$x = 70$	$1\,426.43$	$1\,506.13$	$1\,593.50$

Premio unico Π ad età x; $b = 100$; $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT4})$

Nota:

- con $\xi = x \;\Rightarrow\;$ assenza di capital protection
- con $\xi > x \;\Rightarrow\;$ incrementi di premio (rispetto al caso $\xi = x$) relativamente modesti, data la bassa mortalità negli intervalli di età coinvolti

ASSICURAZIONE TEMPORANEA CASO MORTE

Capitale costante

Beneficio: somma assicurata C pagata alla fine dell'anno di decesso, se l'assicurato decede prima della scadenza m

Prodotto contro le conseguenze finanziarie del decesso di una persona titolare di reddito per il sostentamento di una una famiglia

Prodotto molto comune in tutti i mercati assicurativi; età all'ingresso usualmente non elevata (es. tra 30 e 50 anni)

Vari fattori di rischio possono essere considerati nella determinazione del premio. Valutazione mediante questionari ed eventuale visita medica. In caso di non buone condizioni di salute o rischi professionali $\Rightarrow$ rischio aggravato $\Rightarrow$ maggiore tasso di premio

Premio unico:

$$\Pi = C \, {}_mA'_x$$

Esempio

Tabelle seguenti:

- premio unico in funzione della base tecnica $\mathrm{TB1}$
- effetto di età all'ingresso e durata del contratto

Tavola	$i' = 0$	$i' = 0.01$	$i' = 0.02$	$i' = 0.03$
LT1	19.83	18.63	17.53	16.51
LT2	17.89	16.80	15.81	14.89
LT3	15.93	14.97	14.08	13.26

Premio unico di un'assicurazione temporanea caso morte;
$C = 1\,000$, $x = 40$, $m = 10$

x	$m=5$	$m=10$	$m=15$
40	7.01	17.53	33.26
45	11.70	29.20	55.10
50	19.57	48.52	90.53
55	32.64	80.01	146.52
60	54.19	130.26	231.30

Premio unico di un'assicurazione temporanea caso morte;

$C = 1\,000$, $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$

Capitale variabile

Beneficio: C_{h+1} pagato al tempo $h+1$ se l'assicurato decede tra h e $h+1$, $h = 1, 2, \dots, m$

Premio unico:

$$\Pi = \sum_{h=0}^{m-1} C_{h+1}\ {}_{h|1}A'_x$$

Assicurazione temporanea decrescente: beneficio decrescente in progressione aritmetica

$$C_1 = C; \;\; C_2 = \frac{m-1}{m}\,C; \;\; C_3 = \frac{m-2}{m}\,C; \;\; \ldots; \;\; C_m = \frac{1}{m}\,C$$

Premio unico

$$\Pi = \frac{C}{m} \sum_{h=0}^{m-1} (m-h)\,{}_{h|1}A'_x$$

espresso anche dalla:

$$\Pi = \frac{C}{m} \sum_{h=0}^{m-1} {}_{m-h}A'_x$$

Usualmente collegata all'ammortamento di un prestito: beneficio decrescente approx in linea con il debito residuo

ASSICURAZIONE A VITA INTERA CASO MORTE

Beneficio: somma assicurata C pagata alla fine dell'anno di decesso dell'assicurato, in qualunque epoca avvenga

Premio unico:

$$\Pi = C\, A'_x$$

Principale scopo storico: finanziare imposte di successione

Attualmente, tipico scopo:

- ▷ coprire il rischio di morte fino ad una certa età (es. 60 o 65)
- ▷ fornire un capitale ad una certa età (scelta dall'assicurato), mediante riscatto del contratto

Esempio

Tavole seguenti:

- premio unico per varie basi tecniche $\mathrm{TB1}$
- premio unico per varie età all'ingresso

Premi unici *(cont.)*

Life table	$i' = 0$	$i' = 0.01$	$i' = 0.02$	$i' = 0.03$
LT1	1 000.00	682.24	473.72	334.94
LT2	1 000.00	675.76	464.90	325.80
LT3	1 000.00	668.57	455.20	315.82
LT4	1 000.00	632.24	406.23	265.44
LT5	1 000.00	623.78	395.14	254.36

Premio unico di un'assicurazione a vita intera caso morte; $C = 1\,000$, $x = 40$

x	A'_x
40	473.72
45	519.16
50	567.35
55	617.66
60	669.17

Premio unico di un'assicurazione a vita intera caso morte; $C = 1\,000$,
$\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$

COMBINAZIONI DI BENEFICI CASO VITA E CASO MORTE

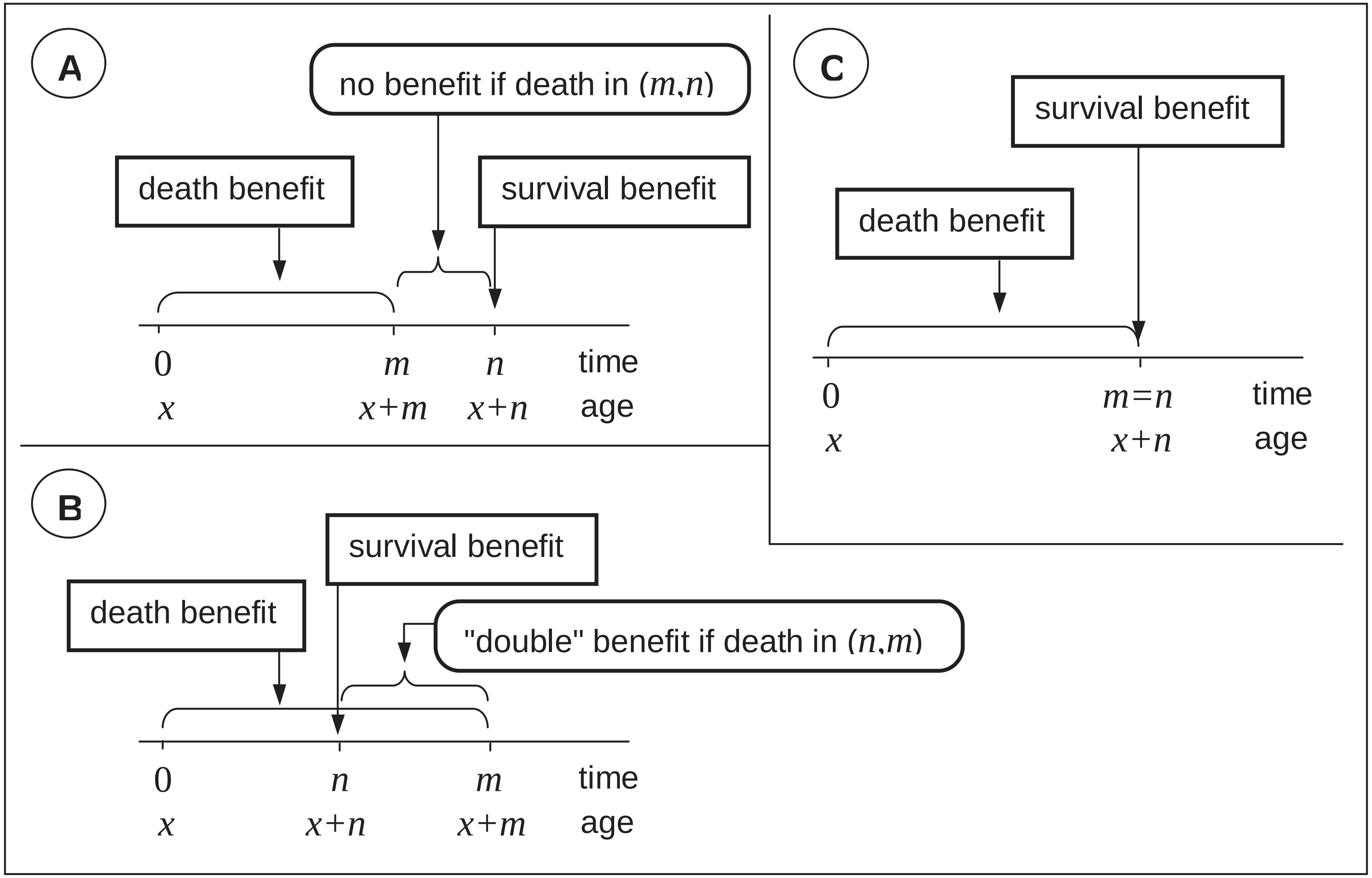
Varie possibilità di combinazione; vedi Figura seguente

In funzione della durata di vita dell'assicurato:

- A $\Rightarrow$ o nessun pagamento o un pagamento
- B $\Rightarrow$ o un pagamento o due pagamenti
- C $\Rightarrow$ uno ed un solo pagamento

Combinare benefici in caso vita e in caso morte ha solitamente lo scopo di garantire che almeno un beneficio sarà certamente pagato (in un istante aleatorio). Notare che:

- A fallisce lo scopo: nessun beneficio pagato se l'assicurato decede tra m e n;
- B realizza lo scopo ma comporta "sovra-assicurazione": doppio pagamento se l'assicurato decede tra n e m;
- C realizza lo scopo



Combinazioni di benefici in caso vita e in caso morte

In particolare le combinazioni di tipo C si propongono gli obiettivi:

- ▷ *risparmio* (tramite il beneficio caso vita)
- ▷ *protezione* (tramite il beneficio caso morte)

Componenti di un premio di assicurazione vita

Fonte: Gerber H. U. (1990), Life Insurance Mathematics, Springer-Verlag

ASSICURAZIONI MISTE

Assicurazione mista ordinaria

Combinazione di un'assic. di capitale differito e di una temporanea caso morte, con uguale capitale assicurato C e uguale durata m (esempio della combinazione C)

Premio unico:

$$\Pi = C\ ({}_mE'_x + {}_mA'_x) = C\ A'_{x,m\rceil}$$

Scopo:

- *risparmio* $\Rightarrow$ capitale in caso vita a scadenza
- *protezione* $\Rightarrow$ copertura di conseguenze finanziarie del decesso dell'assicurato

Esempio 1

Tavola seguente: premio unico in funzione di $\mathrm{TB1}$

Sebbene il premio ovviamente dipenda dalla base tecnica, una variazione della tavola di mortalità ha un effetto debole in quanto

- la somma assicurata è pagata certamente
- la diversa mortalità influisce solo sul tempo atteso di pagamento

Tavola	$i' = 0$	$i' = 0.01$	$i' = 0.02$	$i' = 0.03$
$\mathrm{LT1}$	$1\,000.00$	866.51	752.26	654.32
$\mathrm{LT2}$	$1\,000.00$	866.01	751.37	653.11
$\mathrm{LT3}$	$1\,000.00$	865.51	750.47	651.90

Premio unico di un'assicurazione mista ordinaria; $C = 1\,000$, $x = 50$, $m = 15$

Esempio 2

Tabella seguente: scomposizione del premio unico di un'assicurazione mista ordinaria

		assic. cap. differito + assic. temp. caso morte		capitale certo +	beneficio di "accelerazione"
x	$1\,000\, A'_{x,15\rceil}$	$1\,000\,{}_{15}E'_x$	$1\,000\,{}_{15}A'_x$	$1\,000\,(1+i')^{-15}$	$1\,000\left(A'_{x,15\rceil} - (1+i')^{-15}\right)$
40	746.36	713.10	33.26	743.01	3.35
45	748.59	693.49	55.10	743.01	5.57
50	752.26	661.73	90.53	743.01	9.25
55	758.23	611.70	146.52	743.01	15.21
60	767.69	536.39	231.30	743.01	24.67

Componenti del premio unico di una assicurazione mista ordinaria

$C = 1\,000,\ m = 15,\ \mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$

Notare che:

- il premio unico della mista cresce poco nonostante un forte aumento dell'età all'ingresso, mentre i premi delle due componenti ($1\,000\,A'_{x,\overline{15}|}$ e $1\,000\,{}_{15}E'_x$) dipendono fortemente dall'età
- per tutte le età considerate, valore attuariale del beneficio caso vita ($1\,000\,{}_{15}E'_x$) molto maggiore di quello caso morte ($1\,000\,{}_{15}A'_x$), perché probabilità di essere in vita a scadenza maggiore della probabilità di decesso prima della scadenza, almeno nell'intervallo di età considerate
- risultato apparentemente in contrasto con l'effetto della tavola di mortalità sul premio unico (vedi Esempio 1)
  $\Rightarrow$ analisi della natura tecnica della assicurazione mista

Dall'identità

$$A'_{x,m\rceil} = (1+i')^{-m} + \left(A'_{x,m\rceil} - (1+i')^{-m} \right)$$

cioè

$$A'_{x,m\rceil} = (1+i')^{-m} + \underbrace{\sum_{h=0}^{m-1} (1+i')^{-(h+1)} {}_{h|1}q'_x + (1+i')^{-m} {}_m p'_x}_{A'_{x,m\rceil}}$$

$$- (1+i')^{-m} \underbrace{\left(\sum_{h=0}^{m-1} {}_{h|1}q'_x + {}_m p'_x \right)}_{1}$$

si ottiene:

$$\mathit{\Pi} = C\,A'_{x,m\rceil} = C\,(1+i')^{-m} + C\,\left(A'_{x,m\rceil} - (1+i')^{-m}\right)$$

$$= C\,(1+i')^{-m} + \sum_{h=0}^{m-2} \underbrace{C\left((1+i')^{-(h+1)} - (1+i')^{-m}\right)}_{\mathit{\Gamma}_h}\,{}_{h|1}q'_x$$

$\mathit{\Gamma}_h$ = valore attuale della “accelerazione” nel pagamento del beneficio a causa del decesso dell’assicurato nell’anno $h+1$

Interpretazione: premio unico dell’assicurazione mista = valore attuale del capitale C certo a scadenza + valore attuariale del *beneficio di accelerazione*

Se $i'=0 \;\Rightarrow\; \mathit{\Gamma}_h = 0$ per ogni h, e $\mathit{\Pi} = C$

Esempio 3

Vedi ultima colonna nella precedente Tabella

Altre forme di assicurazione mista

Beneficio in caso vita, S, diverso dal beneficio in caso morte, C
Premio unico:

$$\Pi = S \, {}_mE'_x + C \, {}_mA'_x$$

Se $S > C \ \Rightarrow$ *assicurazione mista combinata*. Ponendo $S = (1+\alpha)\,C$:

$$\Pi = \alpha\, C \, {}_mE'_x + C \, A'_{x,m\rceil}$$

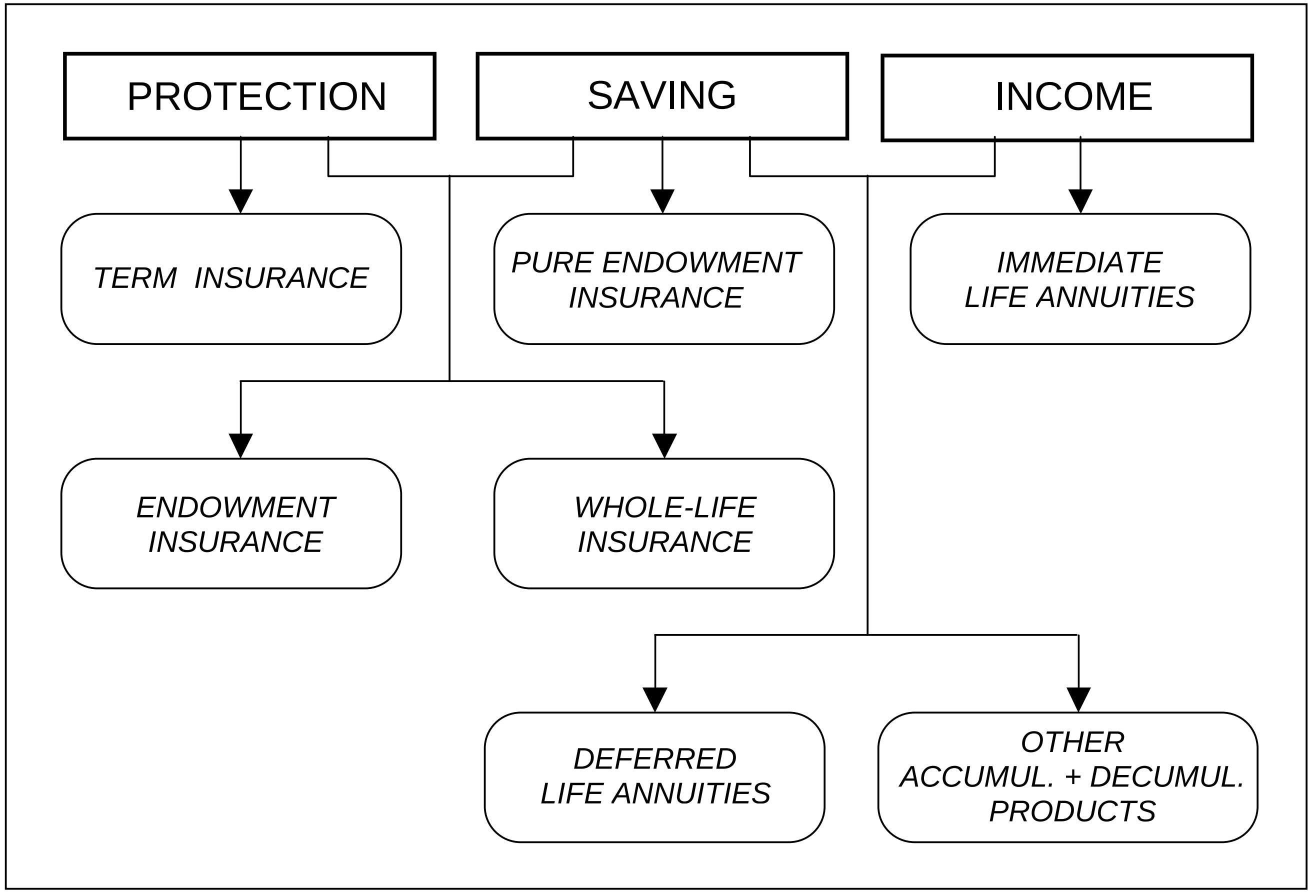
(esempio di combinazione C)

Combinazione di un'assic. di capitale differito con una assicurazione a vita intera caso morte $\Rightarrow$ *assicurazione mista a capitale raddoppiato*:

$$\Pi = C \, ({}_mE'_x + A'_x) = C \, A'_{x,m\rceil} + C \, {}_{m|}A'_x$$

(esempio di combinazione B, con $m = \omega - x$)

UNA CLASSIFICAZIONE DEI PRODOTTI ASSICURATIVI VITA



Classificazione secondo lo scopo dei vari prodotti

UTILI ATTESI

Si assuma:

- premio unico Π calcolato come valore attuariale dei benefici
- base tecnica del primo ordine (prudenziale) $\mathrm{TB1}$

Per esempio, riferimento ad assicurazione a vita intera caso morte di capitale C: $\Pi = C\,A'_x$

Sia $C\,A''_x$ il valore attuariale del beneficio, calcolato con base del secondo ordine, $\mathrm{TB2} \;\Rightarrow\; C\,A''_x$ = valutazione “realistica” del beneficio in termini di

- tasso d’interesse, i'' (stima del rendimento degli investimenti)
- probabilità di decesso, q'' (mortalità attesa nel portafoglio)

Valore attuale atteso dell’utile (o *utile atteso*):

$$\text{utile atteso} = \Pi - C\,A''_x = C(A'_x - A''_x)$$

Esempio

Prodotto assicurativo	$\mathit{\Pi} = C\,A'$	$C\,A''$	$C(A' - A'')$	$\dfrac{C(A' - A'')}{\mathit{\Pi}}$
Assic. temp. caso morte; $C = 1\,000$; $x = 40$, $m = 10$	16.51	13.26	3.25	19.69%
Assic. a vita intera caso morte; $C = 1\,000$; $x = 40$	334.94	315.82	19.12	5.71%
Assic. mista ordinaria; $S = C = 1\,000$; $x = 50$, $m = 15$	654.32	651.90	2.42	0.37%

Utile atteso. $\mathrm{TB1} = (0.03, \mathrm{LT1})$; $\mathrm{TB2} = (0.03, \mathrm{LT3})$

Prodotto assicurativo	$\mathit{\Pi} = C\,A'$	$C\,A''$	$C(A' - A'')$	$\dfrac{C(A' - A'')}{\mathit{\Pi}}$
Assic. temp. caso morte; $C = 1\,000$; $x = 40$, $m = 10$	14.08	13.26	0.82	5.82%
Assic. a vita intera caso morte; $C = 1\,000$; $x = 40$	455.20	315.82	139.38	30.62%
Assic. mista ordinaria; $S = C = 1\,000$; $x = 50$, $m = 15$	750.47	651.90	98.57	13.13%

Utile atteso. $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT3})$; $\mathrm{TB2} = (0.03, \mathrm{LT3})$

Ulteriori problemi da affrontare:

- attribuzione dell'utile atteso a *fonti di utile*
  - ▷ mortalità / longevità
  - ▷ rendimenti

  più in generale anche
  - ▷ spese / caricamenti per spese
  - ▷ storni / riscatti
- *emergere* dell'utile nel tempo $\Rightarrow$ attribuzione di quote dell'utile atteso ai vari anni di contratto

Osservazione

In matematica attuariale $\Rightarrow$ valutazione di *utili attesi* (ex-ante), non analisi di utili realizzati (ex-post)

4.4 PREMI PERIODICI

Espressione “premi periodici”: insieme di possibili articolazioni di pagamento premi, o *regimi* di pagamento, con il comune obiettivo di soddisfare i contraenti

Diversi regimi di pagamento $\Rightarrow$ diversi problemi tecnici e finanziari

UN ESEMPIO

Assicurazione temporanea caso morte, con $m = 5$ e $C = 1$
Premio unico

$$\Pi = {}_5A'_x$$

In luogo del premio unico Π, si stabilisca una sequenza di premi annuali

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4$$

pagabili agli istanti $t = 0, 1, \ldots, 4$ rispettivamente, se l’assicurato è in vita alla scadenza di pagamento

La sequenza di pagamenti costituisce un flusso aleatorio (rendita vitalizia temporanea)

Anzitutto si consideri il caso di due soli premi, e si ponga:

$$P_2 = P_3 = P_4 = 0$$

Si adotti il principio di equità

Valore attuale aleatorio, X, della sequenza di premi:

$$X = P_0 + \begin{cases} P_1\,(1+i')^{-1} & \text{se } K_x \geq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Valore attuariale:

$$\mathbb{E}[X] = P_0 + P_1\,(1+i')^{-1}\,{}_1p'_x = P_0 + P_1\,{}_1E'_x$$

(assumendo la stessa base tecnica $\mathrm{TB1}$ per benefici e premi)

Principio di equità: in generale deve essere

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$$

con $\mathbb{E}[Y]$ = valore attuariale dei benefici

Nell'esempio $\Rightarrow$ i premi devono essere soluzioni di:

$$P_0 + P_1\, {}_1E'_x = {}_5A'_x \qquad (^*)$$

Una equazione, due incognite $\Rightarrow$ ∞ soluzioni

Due soluzioni particolari:

$$P_0 = {}_5A'_x, \quad P_1 = 0 \qquad (^\circ)$$

$$P_0 = 0, \quad P_1 = \frac{{}_5A'_x}{{}_1E'_x} \qquad (^{\circ\circ})$$

Soluzione $(^\circ)$ $\Rightarrow$ premio unico

Soluzione $(^{\circ\circ})$ $\Rightarrow$ non ammissibile; perché ?

Caratteristiche della soluzione $(^{\circ\circ})$

- soddisfa il principio di equità (è soluzione della $(^*)$), che tiene conto (solo) della mortalità
- non ammissibile a causa di un "vincolo" (non ancora dichiarato, e non implicato dal principio di equità)
- se l'assicurato abbandona il contratto al tempo 1, prima di pagare P_1, ha ottenuto gratuitamente la copertura assicurativa per 1 anno, senza contribuire alla mutualità
- per l'assicuratore, difficoltà pratiche di ottenere il pagamento
- l'assicuratore non deve essere mai in posizione di credito
  $\Rightarrow$ *condizione di finanziamento* (vincolo)

Ricerca di soluzioni ammissibili dell'equazione $(*)$

Valore attuale atteso della copertura relativa al primo anno = ${}_1A'_x$

Soluzioni che soddisfano la condizione di finanziamento: coppie P_0, P_1 tali che

$$P_0 \geq {}_1A'_x$$

In particolare,

$$P_0 = {}_1A'_x \;\Rightarrow\; P_1 = {}_4A'_{x+1}$$

Quindi

- P_0 copre esattamente il costo atteso della copertura assicurativa nel primo anno $\Rightarrow$ al tempo 1 l'assicuratore non è in credito né in debito
- P_1 interpretabile come premio unico per la residua durata (a condizione che l'assicurato sia in vita al tempo 1)

Se invece

$$P_0 > {}_1A'_x \;\Rightarrow\; P_1 < {}_4A'_{x+1}$$

Quindi:

- l'assicuratore incassa
  - alla stipulazione del contratto più di quanto necessario a coprire il costo atteso del primo anno
  - al tempo 1 meno di quanto necessario per coprire il costo per la residua durata
- al tempo 1, importo disponibile (un *attivo*) per far fronte alla insufficienza di P_1; un corrispondente debito dell'assicuratore (un *passivo*) emerge alla fine del primo anno

Attivo e passivo originati dal regime dei premi: due aspetti della *riserva matematica* del contratto assicurativo

In caso di premio unico, l'unico introito dell'assicuratore (alla stipulazione del contratto) dà luogo a situazione analoga

Consideriamo regimi di pagamento premi con tutti i premi positivi (sempre riferimento alla temporanea caso morte con durata 5 anni)

Premi naturali

Si assuma:

$$P_h = {}_1A'_{x+h}; \quad h = 0, 1, \ldots, 4$$

Notare che:

- ciascun premio (pagato se l'assicurato è in vita al tempo di pagamento) soddisfa il principio di equità su base monoannuale
- regime di pagamento premi comune in assicurazione non-vita

Premi comunemente chiamati *premi naturali*, e denotati con $P_h^{[\mathrm{N}]}$

Sequenza di premi naturali soddisfa il principio di equità anche sull'intera durata contrattuale:

$$\sum_{h=0}^{4} {}_hE'_x \, P_h^{[\mathrm{N}]} = \sum_{h=0}^{4} {}_hE'_x \, {}_1A'_{x+h} = \sum_{h=0}^{4} {}_{h|1}A'_x = {}_5A'_x$$

Condizione di finanziamento soddisfatta: in particolare ad ogni anniversario di contratto né credito né debito

Essendo ${}_1A'_{x+h} = (1+i')^{-1}\, q'_{x+h} \;\Rightarrow$ premi naturali della temporanea caso morte crescenti se probabilità annue di decesso crescenti (usuale per età e durate che interessano questo tipo di assicurazione)

Premi costanti (o "livellati")

Per evitare sequenza di premi crescenti $\Rightarrow$ premi costanti P per tutta la durata contrattuale

Per il principio di equità:

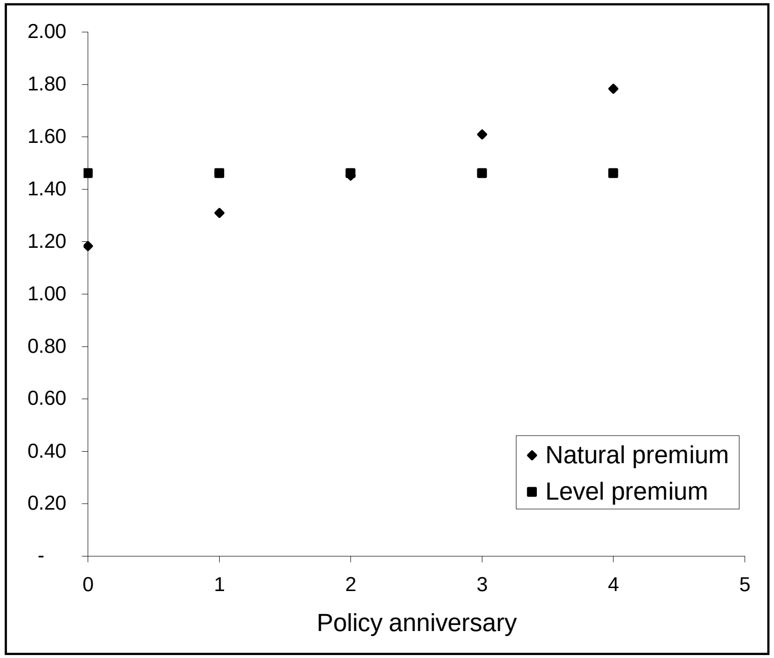
$$P \sum_{h=0}^{4} {}_hE'_x = {}_5A'_x$$

quindi:

$$P = \frac{{}_5A'_x}{\ddot{a}'_{x:\overline{5}|}}$$

Esempio

Andamento dei premi naturali rispetto ai premi livellati
$\Rightarrow$ processo di riservazione richiesto per “trasferire” risorse dagli anni iniziali a quelli finali



Assicurazione temporanea caso morte: premi naturali e premi annui costanti

$C = 1\,000$, $x = 40$, $m = 5$, $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$

Notare che:

$$P = \frac{{}_5A'_x}{\ddot{a}'_{x:\overline{5}|}} = \frac{\sum_{h=0}^{4} {}_hE'_x \, {}_1A'_{x+h}}{\sum_{h=0}^{4} {}_hE'_x}$$

Premio annuo costante P = media aritmetica ponderata dei premi naturali $P_h^{[\mathrm{N}]} = {}_1A'_{x+h}$

Pesi dati da ${}_hE'_x$, e quindi proporzionali a

- probabilità di essere in vita (e quindi pagare il premio)
- tempo tra la stipulazione del contratto e il pagamento del premio

Caso di premi costanti con durata minore della durata contrattuale, ad es. 3 anni:

$$P(3) = \frac{{}_5A'_x}{\ddot{a}'_{x:\overline{3}|}}$$

ovviamente $P(3) > P$

PREMI PERIODICI: "REGIMI" DI PAGAMENTO PREMI

Riferimento a generici contratti di assicurazione vita

Esamineremo tre regimi:

- premi costanti (o "livellati")
- premi naturali
- premi unici ricorrenti

Ciascun regime corrisponde ad una diversa logica di finanziamento dei benefici

Non tutti i regimi sono applicabili a tutti i contratti $\Rightarrow$ applicabilità dipende dal tipo di benefici contrattuali

PREMI COSTANTI

Secondo il principio di equità:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$$

cioè:

$$\text{valore attuariale dei premi costanti} \; = \; \text{valore attuariale dei benefici}$$

Se il premio unico Π è calcolato con lo stesso principio:

$$\text{valore attuariale dei premi costanti} \; = \; \Pi$$

Durate:

- m durata del contratto
- s durata del pagamento premi, $s \leq m$
- solitamente $s = m \Rightarrow$ premio $P = P(m)$
- $s < m$ richiesto in alcuni casi, per soddisfare la condizione di finanziamento $\Rightarrow$ premio $P(s)$

In generale, per $s \leq m$:

$$P(s) = \frac{\Pi}{\ddot{a}'_{x:s\rceil}}$$

Per due diverse durate di pagamento premi, s_1 e s_2:

$$s_1 < s_2 \quad \Rightarrow \quad P(s_1) > P(s_2)$$

Ovviamente, per qualunque $s > 1$:

$$\ddot{a}'_{x:s\rceil} < s \;\Rightarrow\; P(s) > \frac{\Pi}{s}$$

Si supponga capitale $C = 1$

Assicurazione di capitale differito, durata m:

$$P(s) = \frac{{}_mE'_x}{\ddot{a}'_{x:\overline{s}|}}$$

Assicurazione temporanea caso morte, durata m:

$$P(s) = \frac{{}_mA'_x}{\ddot{a}'_{x:\overline{s}|}}$$

Assicurazione mista ordinaria, durata m:

$$P(s) = \frac{A'_{x,\overline{m}|}}{\ddot{a}'_{x:\overline{s}|}}$$

Solitamente in questi prodotti $s = m$

Assicurazione a vita intera caso morte: pagamento premi può, in teoria, estendersi sull'intera durata contrattuale

$$P(\omega - x) = \frac{A'_x}{\ddot{a}'_x}$$

In pratica, pagamento premi ristretto a s anni (es. $x + s = 70$, o 75)
Quindi:

$$P(s) = \frac{A'_x}{\ddot{a}'_{x:s\rceil}}$$

Esempio

Tabella seguente: premi unici e premi annui costanti con varie durate di pagamento; somma assicurata $C = 1\,000$; $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$

Premi periodici *(cont.)*

PRODOTTO ASSICURATIVO	x	m	Π	s	$P(s)$
Capitale differito	45	10	793.24		
				5	165.72
				10	87.60
Temporanea caso morte	40	10	17.53		
				5	3.66
				10	1.93
Mista ordinaria	50	15	752.26		
				5	157.63
				10	83.74
				15	59.54
A vita intera caso morte	40		473.72		
				10	52.07
				20	29.02
				30	21.80
				$\omega - x$	17.65

Premi unici e premi annui costanti

PREMI NATURALI

Considerare un generico prodotto assicurativo vita, e

1. riferirsi ad anno di contratto $(h+1)$, $h = 0, 1, \ldots$ (intervallo tra h e $h+1$)
2. supporre assicurato in vita al tempo h
3. individuare benefici relativi all'anno $(h+1)$
4. calcolare il valore attuariale al tempo h dei benefici di cui al passo (3), detto anche *costo annuo atteso* (dei benefici)

I *premi naturali* sono, per definizione, i costi annui attesi

Base tecnica adottata nel passo (4): usualmente la base $\mathrm{TB1}$

Osservazione

Premi naturali:

- ▷ importante informazione tecnica e finanziaria sul profilo temporale dei costi attesi dell'assicuratore (e sui cash flow attesi)
- ○ non necessariamente costituiscono un ragionevole regime di pagamento premi

Assicurazione temporanea caso morte, durata m, capitale $C = 1$:

$$P_h^{[\mathrm{N}]} = {}_1A'_{x+h} = (1+i')^{-1}\,{}_1q'_{x+h}; \quad h = 0, 1, \ldots, m-1$$

Età e durate usuali $\Rightarrow$ premi naturali crescenti durante il periodo contrattuale

Possono costituire un regime ragionevole di pagamento premi (adottato nella pratica)

Assicurazione temporanea caso morte con somma assicurata C_{h+1} in caso di decesso nell'anno $h+1$:

$$P_h^{[\mathrm{N}]} = C_{h+1}\,{}_1A'_{x+h} = C_{h+1}\,(1+i')^{-1}\,{}_1q'_{x+h}; \quad h = 0, 1, \ldots, m-1$$

Se C_{h+1} decresce al crescere di h (es. *assicurazione temporanea decrescente*) i premi naturali possono essere decrescenti

Possono costituire un regime ragionevole di pagamento premi (adottato nella pratica)

Osservazione

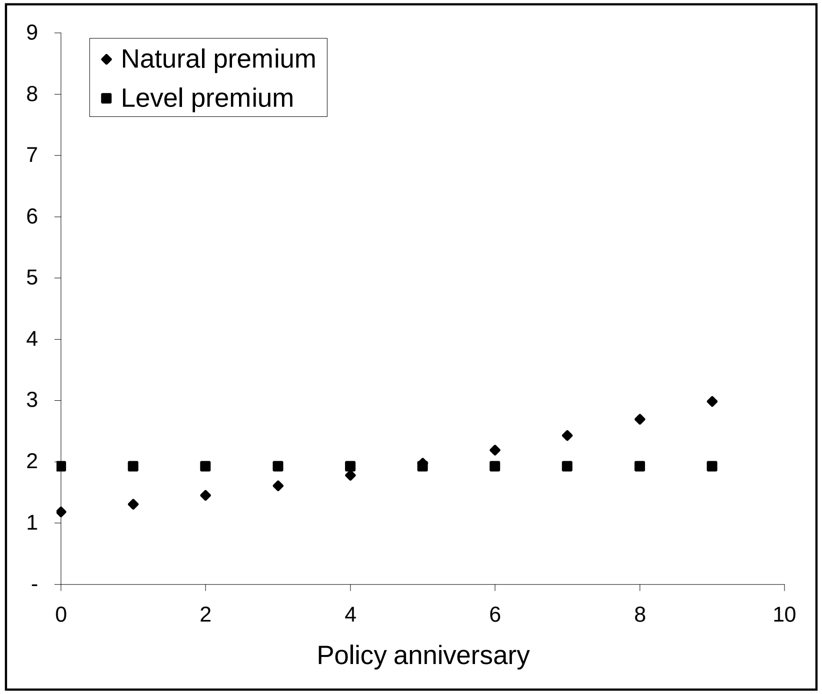
Se $P_h^{[\mathrm{N}]}$ decrescenti (almeno su parte della durata contrattuale), in caso di regime a premi costanti la condizione di finanziamento impone una durata di pagamento premi s abbreviata rispetto alla durata contrattuale m

In particolare, se $P_h^{[\mathrm{N}]}$ decrescenti su tutta la durata contrattuale allora s tale che:

$$P(s) \geq P_0^{[\mathrm{N}]}$$

Esempio

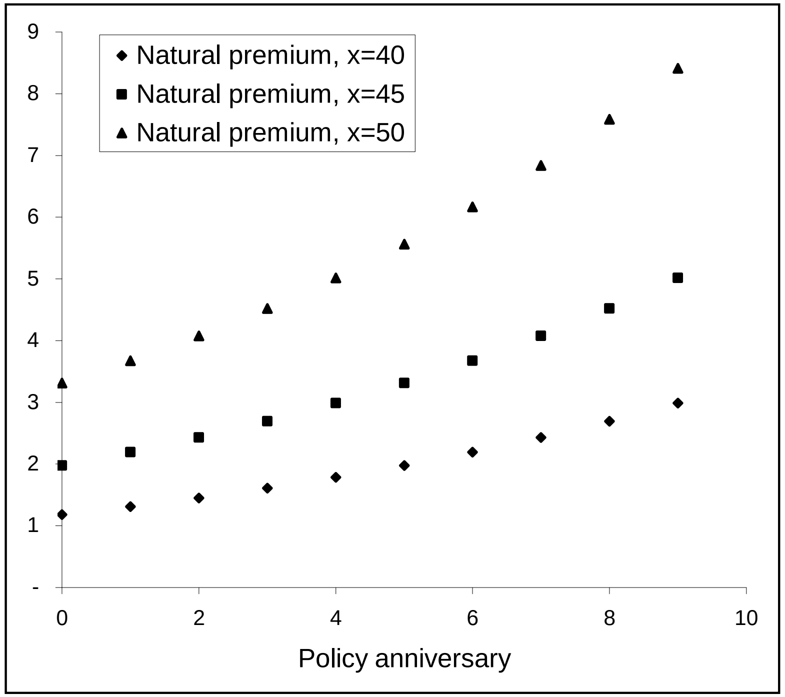
Figure seguenti: profilo temporale dei premi naturali della temporanea caso morte a capitale costante ed a capitale decrescente; $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$



Premi naturali e premi costanti di una temporanea caso morte;

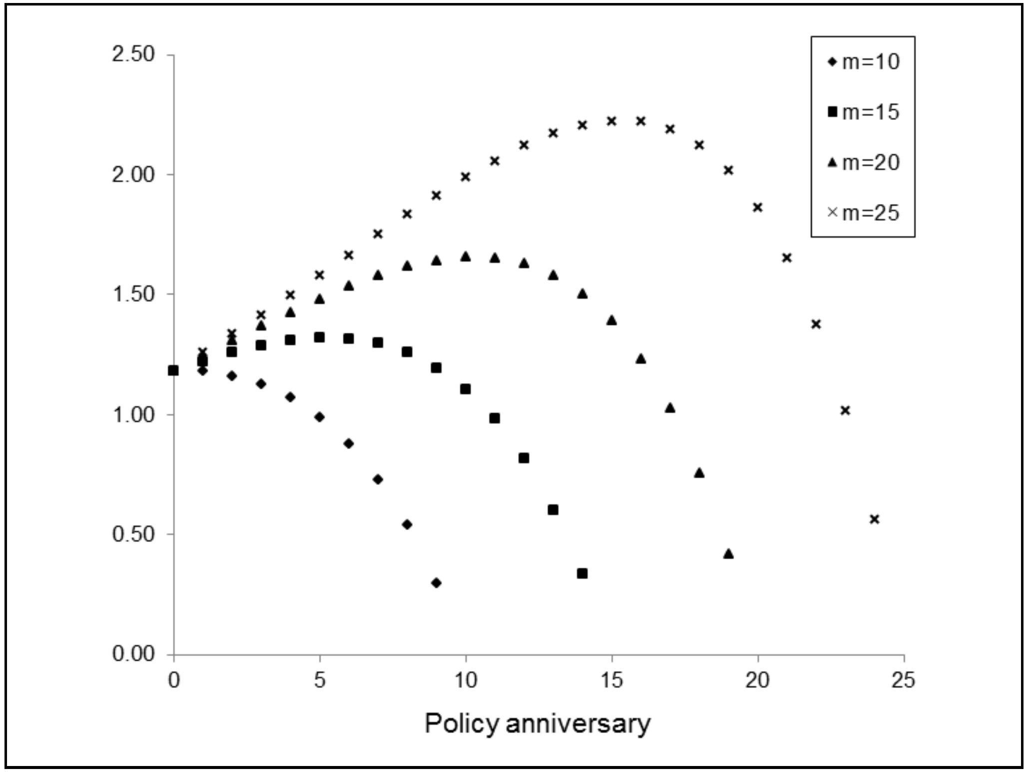
$C = 1\,000$, $x = 40$, $m = 10$,

$\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$

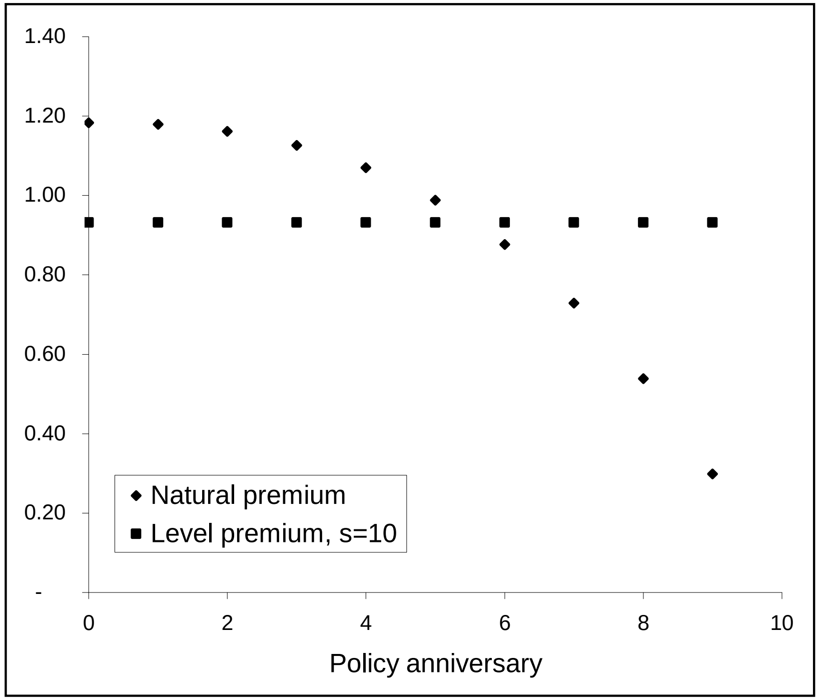


Premi naturali di una temporanea caso morte per varie età all'ingresso;

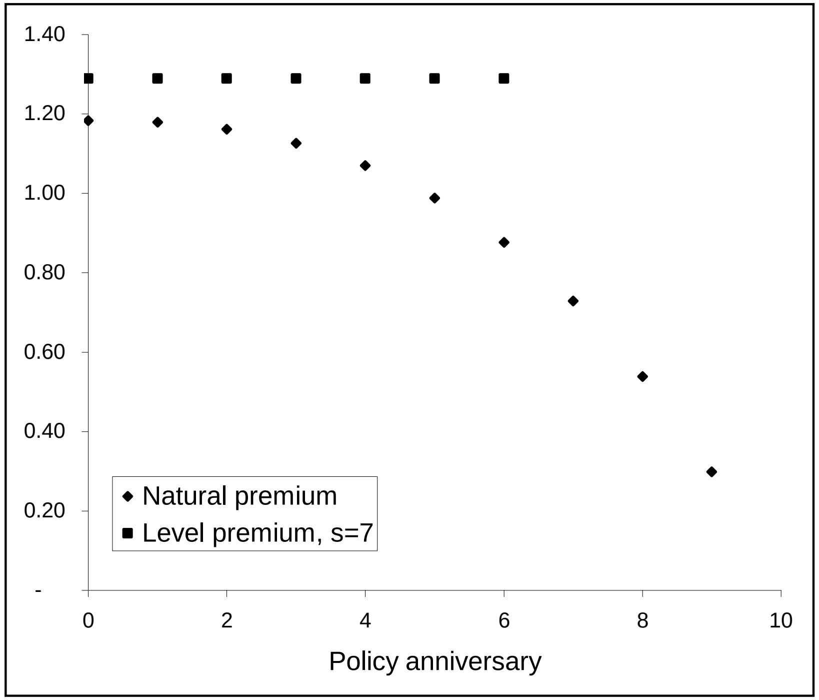
$C = 1\,000$, $m = 10$, $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$



Premi naturali di temporanee caso morte decrescenti
con varie durate m*;* $C_h = \frac{m-h+1}{m}\,1\,000$*,* $x = 40$*,* $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$



(a)



(b)

Premi naturali, premi costanti e premi costanti abbreviati
di una temporanea caso morte decrescente

$$C_h = \frac{m-h+1}{m}\,1\,000, \;\; x=40, \;\; m=10, \;\; \mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$$

Assicurazione di capitale differito, capitale $S = 1$. Beneficio solo al tempo m in caso di vita; quindi:

$$P_h^{[\mathrm{N}]} = 0; \quad h = 0, 1, \ldots, m-2$$

$$P_{m-1}^{[\mathrm{N}]} = {}_1E'_{x+m-1} = (1+i')^{-1}\,{}_1p'_{x+m-1}$$

Non un regime ragionevole di pagamento premi

Assicurazione mista (ordinaria) , $S = C = 1$:

$$P_h^{[\mathrm{N}]} = {}_1A'_{x+h} = (1+i')^{-1}\,{}_1q'_{x+h}; \quad h = 0, 1, \ldots, m-2$$

$$\begin{aligned} P_{m-1}^{[\mathrm{N}]} &= {}_1A'_{x+m-1} + {}_1E'_{x+m-1} \\ &= (1+i')^{-1}\left({}_1q'_{x+m-1} + {}_1p'_{x+m-1}\right) = (1+i')^{-1} \end{aligned}$$

Non un regime ragionevole di pagamento premi (per la presenza della componente capitale differito)

PREMI UNICI RICORRENTI

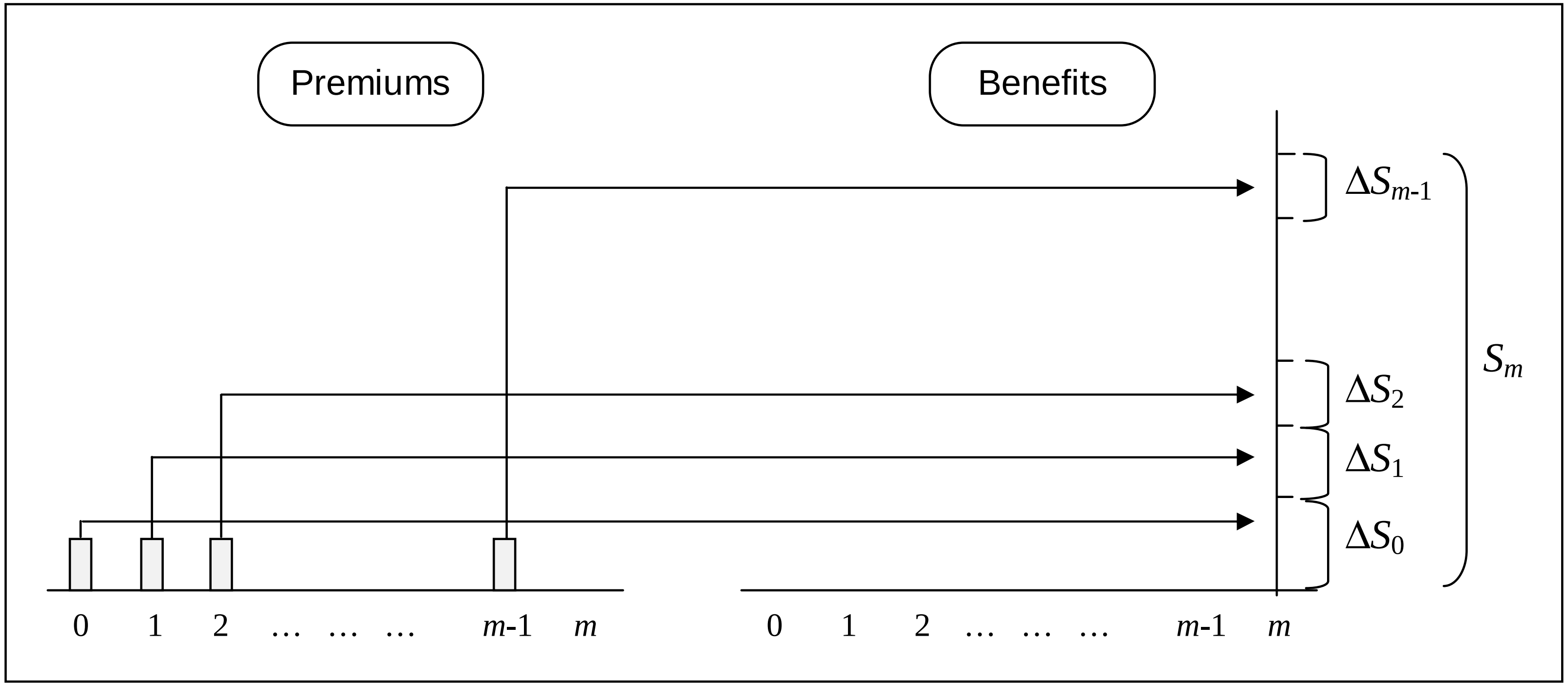
Scopo principale: maggiore flessibilità nel pagamento premi

Assicurazione di capitale differito

Sequenza di pagamenti (i premi unici ricorrenti) $\Pi_0, \Pi_1, \ldots, \Pi_{m-1}$

Premio Π_h, pagato al tempo h, finanzia il beneficio ΔS_h differito $m-h$ anni (cioè un aumento del "beneficio cumulato")

$$
\begin{aligned}
\Pi_0 &= \Delta S_0 \, {}_mE'_x \quad &;& \quad S_1 = \Delta S_0 \\
\Pi_1 &= \Delta S_1 \, {}_{m-1}E'_{x+1} \quad &;& \quad S_2 = S_1 + \Delta S_1 \\
\Pi_2 &= \Delta S_2 \, {}_{m-2}E'_{x+2} \quad &;& \quad S_3 = S_2 + \Delta S_2 \\
&\ldots & & \quad \ldots \\
\Pi_{m-1} &= \Delta S_{m-1} \, {}_1E'_{x+m-1} \quad &;& \quad S_m = S_{m-1} + \Delta S_{m-1}
\end{aligned}
$$



Assicurazione di capitale differito: costituzione progressiva del capitale a scadenza

Importo S_m: somma assicurata (totale), finanziata progressivamente dai premi unici ricorrenti Π_h

L'importo di ciascun premio può essere scelto al momento di pagamento $\Rightarrow$ S_m definitivamente noto solo al tempo $m-1$

S_m è tecnicamente prodotto da m assicurazioni di capitale differito "sovrapposte"

- ▷ il processo di accumulazione si basa su interesse e mutualità
- ▷ S_m maggiore del risultato di un'accumulazione puramente finanziaria

Esempio

Tabella seguente:

- assicurazione di capitale differito finanziata da premi unici ricorrenti
- confronto tra il risultante processo di accumulazione e l'accumulazione puramente finanziaria di importi uguali ai premi unici ricorrenti, in cui risulta:

$$\Delta M_h = \Pi_h \, (1 + i')^{m-h}; \quad M_{h+1} = M_h + \Delta M_h$$

  per $h = 0, 1, \dots, m-1$, con $M_0 = 0$
- tassi "equivalenti" $g_{x+h,m-h}$ tali che:

$$\Pi_h \, (1 + g_{x+h,m-h})^{m-h} = \Delta S_h$$

h	Π_h	ΔS_h	S_{h+1}	ΔM_h	M_{h+1}	$g_{x+h,m-h}$
0	100	128.98	128.98	121.90	121.90	0.02577
1	100	126.02	255.00	119.51	241.41	0.02603
2	100	123.09	378.08	117.17	358.57	0.02631
3	100	120.17	498.25	114.87	473.44	0.02659
4	100	117.27	615.53	112.62	586.06	0.02691
5	120	137.26	752.79	132.49	718.55	0.02724
6	120	133.81	886.59	129.89	848.44	0.02761
7	120	130.36	1 016.95	127.34	975.79	0.02799
8	120	126.91	1 143.86	124.85	1 100.63	0.02839
9	120	123.46	1 267.32	122.40	1 223.03	0.02883

Assicurazione di capitale differito
ed accumulazione puramente finanziaria
$x = 50$, $m = 10$, $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$

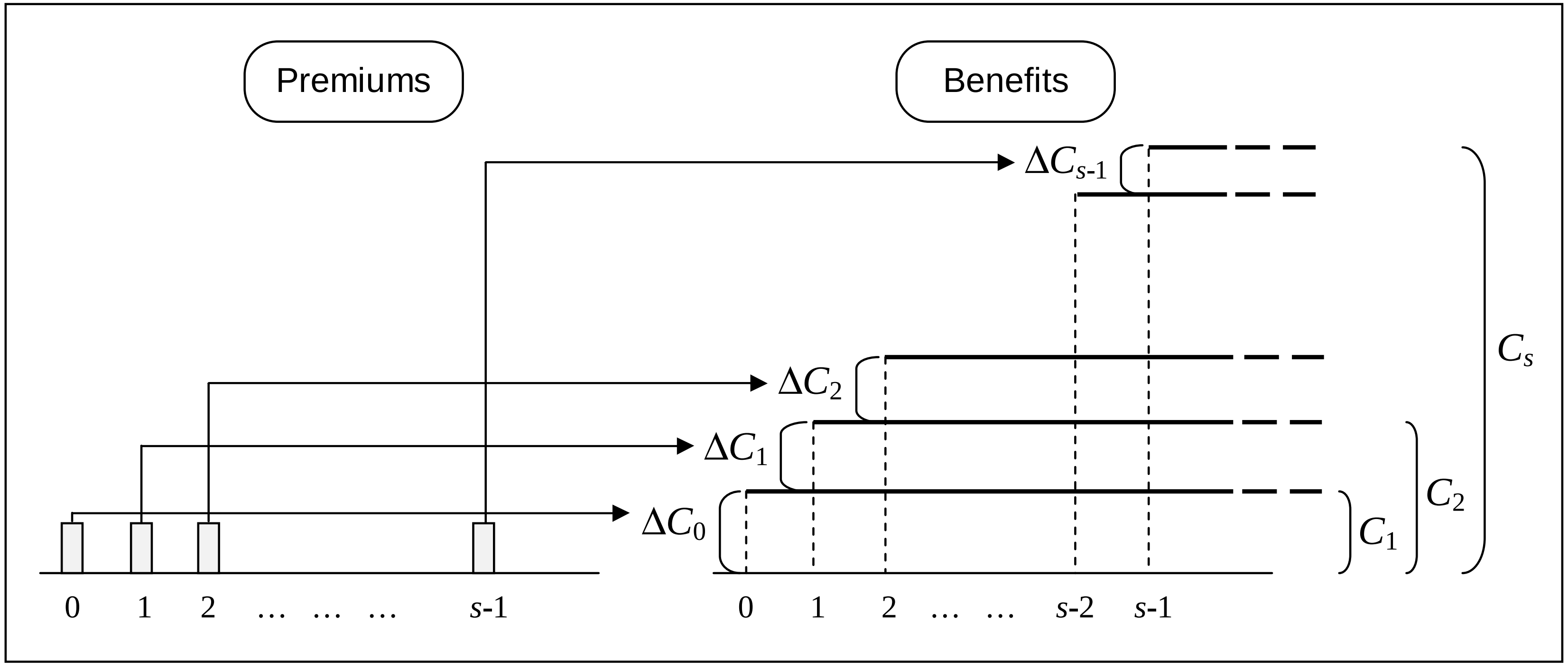
Assicurazione a vita intera caso morte

Sequenza di pagamenti (premi unici ricorrenti) $\mathit{\Pi}_0, \mathit{\Pi}_1, \mathit{\Pi}_2, \ldots$

Premio $\mathit{\Pi}_h$, pagato al tempo h, finanzia l'importo ΔC_h che, dal tempo h in poi, costituisce una parte della somma assicurata

Relazioni tra premio $\mathit{\Pi}_h$, importo ΔC_h, ed importo C_{h+1} (somma assicurata risultante al tempo h, pagabile in caso di decesso tra h ed $h+1$)

$$
\begin{array}{rcl}
\mathit{\Pi}_0 = \Delta C_0 \, A'_x & ; & C_1 = \Delta C_0 \\
\mathit{\Pi}_1 = \Delta C_1 \, A'_{x+1} & ; & C_2 = C_1 + \Delta C_1 \\
\ldots & & \ldots \\
\mathit{\Pi}_h = \Delta C_h \, A'_{x+h} & ; & C_{h+1} = C_h + \Delta C_h \\
\ldots & & \ldots
\end{array}
$$



Assicurazione a vita intera caso morte: formazione del capitale

Esempio

Tabella seguente: assicurazione a vita intera finanziata in alternativa

- da una sequenza di 25 premi unici ricorrenti,

$$\Pi_h = 100, \quad h = 0, 1, \ldots, 24$$

- da una sequenza di 25 premi annui costanti,

$$P(25) = 100$$

per cui C risulta individuato dalla

$$C\, A'_{50} = P(25)\, \ddot{a}'_{50:25\rceil}$$

h	$\mathit{\Pi}_h = P(25)$	ΔC_h	C_{h+1}	C
0	100	176.26	176.26	3 202.60
1	100	173.23	349.49	3 202.60
2	100	170.28	519.77	3 202.60
3	100	167.41	687.18	3 202.60
4	100	164.62	851.80	3 202.60
5	100	161.90	1 013.70	3 202.60
...	...	...	...	
10	100	149.44	1 785.08	3 202.60
11	100	147.17	1 932.25	3 202.60
12	100	144.96	2 077.21	3 202.60
13	100	142.83	2 220.05	3 202.60
14	100	140.77	2 360.82	3 202.60
15	100	138.78	2 499.60	3 202.60
...	...	...	...	
20	100	129.83	3 166.00	3 202.60
21	100	128.24	3 294.24	3 202.60
22	100	126.71	3 420.96	3 202.60
23	100	125.25	3 546.20	3 202.60
24	100	123.84	3 670.05	3 202.60
25	0	0.00	3 670.05	3 202.60
26	0	0.00	3 670.05	3 202.60
...	...	...	...	

Assicurazione a vita intera; $x = 50$, $s = 25$, $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$

Notare:

- $C_{h+1} < C$ nei primi 21 anni
- $C_{h+1} > C$ successivamente

Per esempio, se l'assicurato decede

- nel 12-esimo anno $\Rightarrow$ beneficio $C_{12} = 1\,932.25$
- nel 23-esimo anno $\Rightarrow$ beneficio $C_{23} = 3\,420.96$

Quindi, nel regime a premi costanti

- ▷ inizialmente lo stesso totale di premi cumulati fa fronte ad un beneficio caso morte più elevato di quello finanziato dai premi unici ricorrenti
- ▷ la mutualità ha un ruolo più importante, e l'assicuratore sopporta un maggiore rischio di mortalità

Assicurazione a vita intera caso morte a tasso nullo

Se $i' = 0$, per ogni h si ha

$$A'_{x+h} = 1$$

e quindi, nel caso di premi unici ricorrenti:

$$\Delta C_h = \Pi_h; \quad h = 0, 1, \dots$$

Assicurazione a vita intera “degenera” in una pura accumulazione a tasso zero

In caso di decesso nell’anno t, beneficio pagato:

$$C_t = \sum_{h=0}^{t-1} \Pi_h$$

Quindi nessun rischio di mortalità sopportato dall’assicuratore

Alcuni aspetti pratici

Possibili vincoli su importi e numero di premi
$\Rightarrow$ particolari implementazioni del regime di premi unici ricorrenti

Esempio: premio unico (iniziale) + premi aggiuntivi; vincoli:

- $\triangleright$ ammontare dei premi aggiuntivi (per es. in relazione all'importo del premio unico)
- $\triangleright$ numero di premi aggiuntivi (es. 5, o 10)

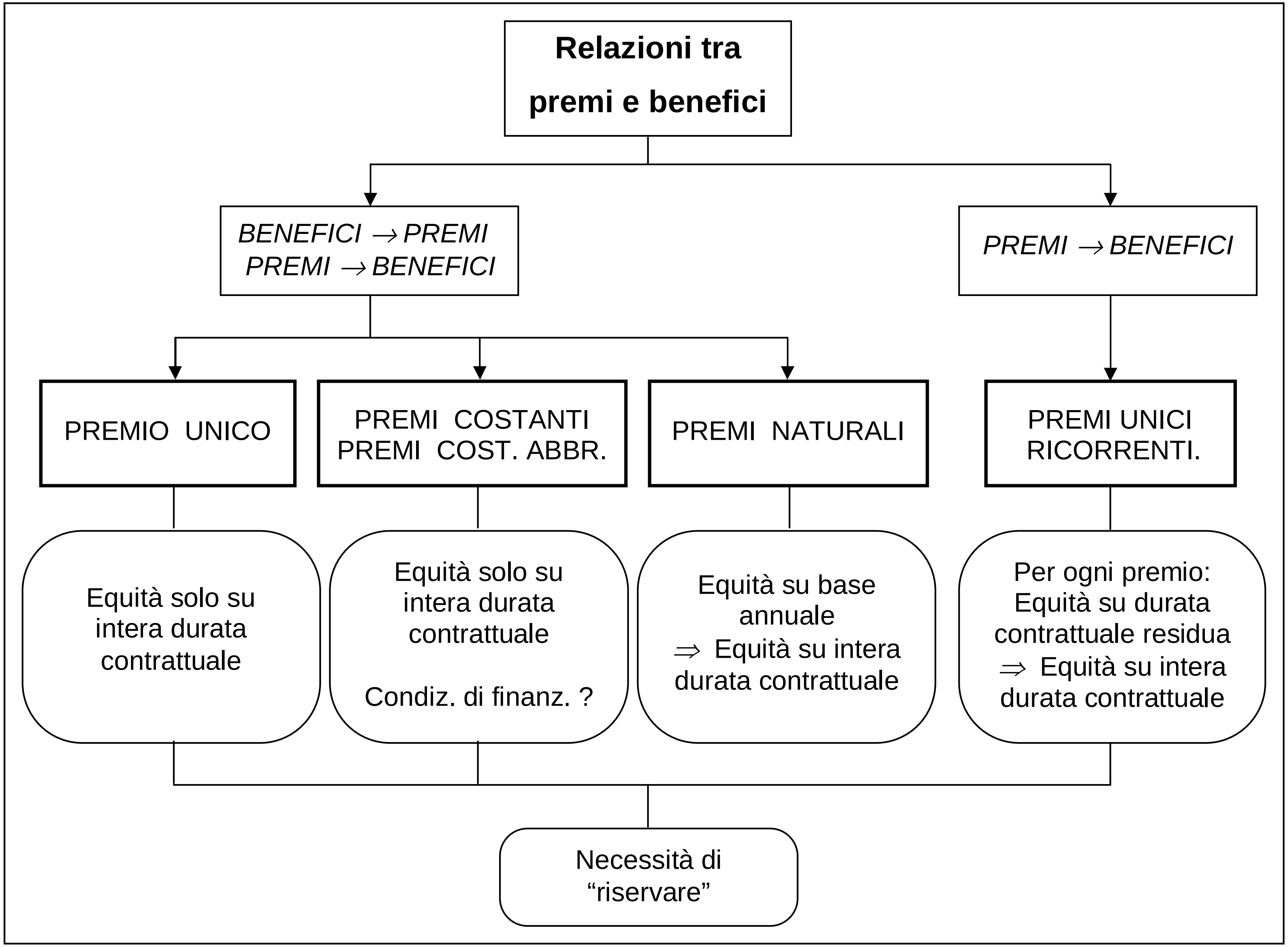
RELAZIONI TRA PREMI E BENEFICI

Diversi regimi di pagamento premi $\Rightarrow$ diverse implicazioni in termini di:

- equità su intervalli temporali
- condizione di finanziamento
- necessità di “riservare”

Vedi figura seguente

Premi periodici *(cont.)*



4.5 CARICAMENTI PER SPESE

COMPONENTI DI PREMIO

Spese: uno degli elementi nel calcolo del premio

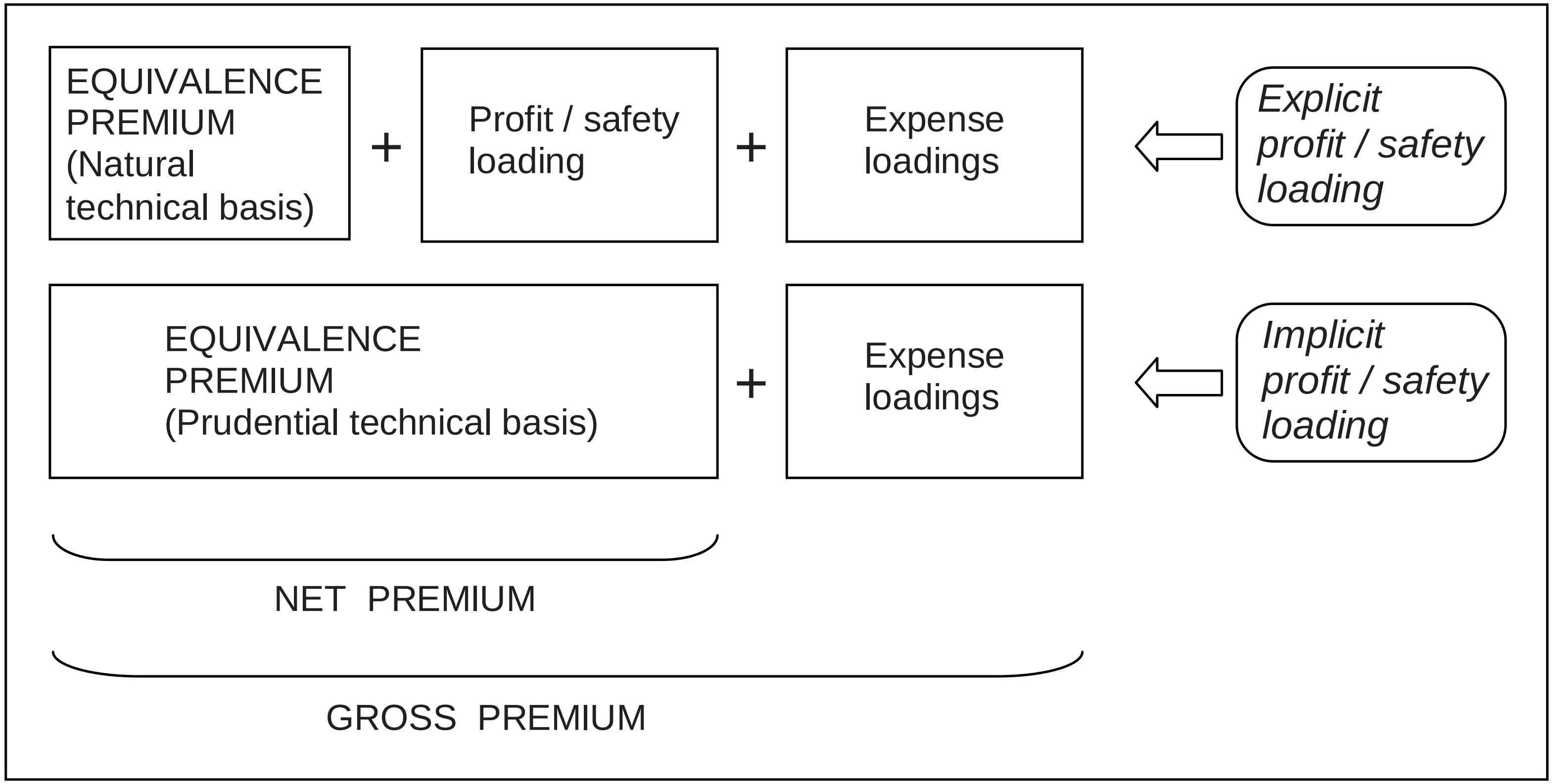
Occorre determinare il caricamento per spese $\Rightarrow$ premi caricati per spese (o *premi di tariffa*)

Approcci:

- caricamento per spese *globale* (o *forfetario*), cioè premio incrementato di una percentuale tale che il risultante caricamento faccia fronte approx a tutte le spese attribuite al contratto
- caricamento per spese *razionale*, basato sull'individuazione di vari tipi di spesa e conseguente determinazione dei relativi caricamenti

Consideriamo il caricamento razionale

Caricamenti per spese *(cont.)*



Componenti del premio

SPESE E CARICAMENTI PER SPESE

Classificazione

1. *Spese di acquisizione*: tutte le spese collegate con la stipulazione di un nuovo contratto, in particolare
   (a) provvigione agenziale
   (b) spese per accertamenti medico-sanitari (eventuali)
   (c) emissione della polizza

   Spese di acquisizione: costo iniziale per l'assicuratore
2. *Spese di incasso premi* (o *raccolta premi*): sostenute all'inizio di ciascun periodo (anno, in particolare) in cui si incassa un premio
3. *Spese generali di amministrazione*: tutte le altre spese dell'assicuratore (non direttamente riguardanti il contratto), per esempio: stipendi, costi di elaborazione dati, tasse e imposte, ecc. $\Rightarrow$ una quota è attribuita a ciascun contratto, per l'intera durata del contratto stesso

Schemi di caricamento per spese

Premio unico

1. Spese di acquisizione caricate sul premio unico stesso
2. Spese di incasso premi non esistenti
3. Valore attuale atteso delle future spese generali (attribuite al contratto) caricato sul premio

Premi annui costanti

1. Spese di acquisizione ripartite in sequenza di importi annui, ciascuno caricato su un premio $\Rightarrow$ “ammortamento”
2. Spese di incasso premi caricate annualmente
3. Spese generali attribuite per l’intera durata del contratto:
    - ▷ premi pagabili per la stessa durata $\Rightarrow$ ciascun premio caricato con la quota annua di spese
    - ▷ premi pagabili per un periodo abbreviato $\Rightarrow$ quota più alta caricata su ciascun premio

PREMI CARICATI PER SPESE

Siano:

$\Pi^{[\mathrm{T}]}$ premio unico caricato per spese

$P^{[\mathrm{T}]}$ premio annuo costante caricato per spese

$\Theta^{[\cdot]}$ generico addendo di caricamento del premio unico

$\Lambda^{[\cdot]}$ generico addendo di caricamento del premio costante

Si indichino con:

$[\mathrm{A}]$ riferimento a spese di acquisizione

$[\mathrm{C}]$ riferimento a spese di incasso premi

$[\mathrm{G}]$ riferimento a spese generali di amministrazione

Premio unico:

$$\Pi^{[\mathrm{T}]} = \Pi + \Theta^{[\mathrm{A}]} + \Theta^{[\mathrm{G}]}$$

Premio annuo costante:

$$P^{[\mathrm{T}]} = P + \Lambda^{[\mathrm{A}]} + \Lambda^{[\mathrm{C}]} + \Lambda^{[\mathrm{G}]}$$

Principio di calcolo: per ogni componente di spesa e di caricamento

valore attuariale in 0 dei caricamenti = valore attuariale in 0 delle spese

cioè principio di equità (secondo $\mathrm{TB1}$)

Osservazione

Ipotesi: spese attribuite al contratto = spese effettivamente attese

Si consideri un contratto di assicurazione con somma assicurata C, durata m, premio unico oppure premio annuo costante per s anni ($s \leq m$)

Spese di acquisizione solitamente assunte proporzionali alla somma assicurata. Sia α la percentuale:

$$\varTheta^{[\mathrm{A}]} = \alpha\, C$$

$$\varLambda^{[\mathrm{A}]}\, \ddot{a}'_{x:s\rceil} = \alpha\, C$$

Alternativa: spese di acquisizione proporzionali al premio caricato per spese

Percentuale di caricamento dipendente dal numero di premi annui. Sia $\delta(s)$ la percentuale di caricamento, solitamente crescente al crescere di s (per una data durata contrattuale m):

$$\varTheta^{[\mathrm{A}]} = \delta(1)\, \varPi^{[\mathrm{T}]}$$

$$\varLambda^{[\mathrm{A}]}\, \ddot{a}'_{x:s\rceil} = \delta(s)\, P^{[\mathrm{T}]}$$

Spese di incasso premi usualmente assunte proporzionali al premio caricato per spese. Sia β la percentuale:

$$\Lambda^{[\mathrm{C}]} = \beta\, P^{[\mathrm{T}]}$$

Spese generali di amministrazione annuali solitamente espresse in percentuale della somma assicurata. Sia γ la percentuale:

$$\Theta^{[\mathrm{G}]} = \gamma\, C\, \ddot{a}'_{x:m\rceil}$$

$$\Lambda^{[\mathrm{G}]}\, \ddot{a}'_{x:s\rceil} = \gamma\, C\, \ddot{a}'_{x:m\rceil}$$

Incidenza totale dei caricamenti per spese, espressa dal *tasso di caricamento totale*:

- in caso di premio unico

$$\theta = \frac{\Pi^{[\mathrm{T}]} - \Pi}{\Pi^{[\mathrm{T}]}} = \frac{\Theta^{[\mathrm{A}]} + \Theta^{[\mathrm{G}]}}{\Pi^{[\mathrm{T}]}}$$

- in caso di premio annuo costante

$$\lambda = \frac{P^{[\mathrm{T}]} - P}{P^{[\mathrm{T}]}} = \frac{\Lambda^{[\mathrm{A}]} + \Lambda^{[\mathrm{C}]} + \Lambda^{[\mathrm{G}]}}{P^{[\mathrm{T}]}}$$

Calcolo del premio annuo costante caricato per spese

Si consideri un'assicurazione a vita intera caso morte, premio annuo costante per s anni, somma assicurata C, età all'ingresso x, modalità di caricamento α per spese di acquisizione:

$$P^{[\mathrm{T}]} = \frac{\dfrac{C}{\ddot{a}'_{x:s\rceil}}\left(A'_x + \alpha + \gamma\, \ddot{a}'_x\right)}{1-\beta}$$

Si consideri un'assicurazione mista ordinaria, durata m anni, premi annui costanti pagabili per tutta la durata contrattuale, modalità di caricamento $\delta(s)$ per spese di acquisizione:

$$P^{[\mathrm{T}]} = \frac{C\left(\dfrac{A'_{x,m\rceil}}{\ddot{a}'_{x:m\rceil}} + \gamma\right)}{1-\beta-\dfrac{\delta(m)}{\ddot{a}'_{x:m\rceil}}}$$

Esempio

Assicurazione a vita intera caso morte; $C = 1\,000$, $x = 50$, $s = 15$; $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$. Parametri di caricamento: $\alpha = 0.02$, $\beta = 0.04$, $\gamma = 0.001$. Si trova:

$$P = 44.90; \quad P^{[\mathrm{T}]} = 49.47$$

Tasso totale di caricamento:

$$\lambda = 0.0922$$

Assicurazione mista ordinaria; $C = 1\,000$, $x = 50$, $m = s = 15$; $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$. Parametri di caricamento: $\delta(15) = 0.55$, $\beta = 0.04$, $\gamma = 0.0015$. Si trova:

$$P = 59.54; \quad P^{[\mathrm{T}]} = 66.60$$

Tasso totale di caricamento:

$$\lambda = 0.1061$$