5 RISERVE MATEMATICHE

Ermanno Pitacco

Matematica attuariale delle assicurazioni vita

5.1 Introduzione

5.2 Aspetti generali

5.3 La riserva matematica di un contratto

5.4 Rischio e risparmio

5.5 Utili attesi

5.6 Riserve per spese

5.7 Valori di riscatto e valori di riduzione

5.1 INTRODUZIONE

Necessità di quantificare la “posizione” (debitoria) dell’assicuratore in un contratto assicurativo, in qualsiasi istante della sua durata

- necessità *ordinarie*; per es.
  - bilancio d’esercizio: posizione debitoria complessiva
  - assegnazione di utili agli assicurati, con utili proporzionali agli investimenti (attivi) relativi a ciascun contratto
- necessità *straordinarie*; per es.
  - interruzione pagamento premi $\Rightarrow$ possibile riscatto
  - trasformazioni di contratto conseguenti una richiesta dell’assicurato

Due aspetti

▷ debito dell’assicuratore $\Rightarrow$ *passivo* (*liability*)

▷ investimento (di parte) dei premi $\Rightarrow$ *attivo* (*assets*)

Osservazione

prodotti assicurativi tradizionali: benefici $\Rightarrow$ investimenti (*liability driven*)

5.2 ASPETTI GENERALI

Trascuriamo ora spese e relativi caricamenti

- Durata del contratto m anni (possibile generalizzazione: $m = \omega - x$)
- t_1, t_2 due istanti (interi, cioè anniversari di contratto), con $0 \leq t_1 < t_2 \leq m$

Definizioni:

$Y(t_1, t_2)$ = valore attuale aleatorio in t_1 dei benefici dovuti nell'intervallo (t_1, t_2)

$X(t_1, t_2)$ = valore attuale aleatorio in t_1 dei premi da incassare nell'intervallo (t_1, t_2)

Inoltre:

$\mathrm{Ben}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[Y(t_1, t_2)]$, valore attuariale in t_1 dei benefici dovuti nell'intervallo (t_1, t_2)

$\mathrm{Prem}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X(t_1, t_2)]$, valore attuariale in t_1 dei premi da incassare nell'intervallo (t_1, t_2)

Si assumano valori attuariali calcolati con la base di primo ordine, $\mathrm{TB1}$

Notazione: Ben', Prem'

Il principio di equità richiede

$$\mathrm{Prem}'(0,m) = \mathrm{Ben}'(0,m)$$

In relazione a sottointervalli di $(0,m)$, può risultare:

$$\mathrm{Prem}'(0,t) \lesseqgtr \mathrm{Ben}'(0,t)$$

$$\mathrm{Prem}'(t,m) \lesseqgtr \mathrm{Ben}'(t,m)$$

e in particolare:

$$\mathrm{Prem}'(t,t+1) \lesseqgtr \mathrm{Ben}'(t,t+1)$$

Esempio

Rif. assicurazione temporanea caso morte, durata m anni, $C = 1$, premio unico Π, o premi annui costanti P pagabili per l'intera durata contrattuale

$$\mathrm{Ben}'(0, m) = {}_{m}A'_{x}$$

$$\mathrm{Prem}'(0, m) = \begin{cases} \Pi & \text{in caso di premio unico} \\ P\,\ddot{a}'_{x:m\rceil} & \text{in caso di premi annui costanti} \end{cases}$$

Per $t = 1, 2, \ldots, m - 1$:

$$\mathrm{Ben}'(t, m) = {}_{m-t}A'_{x+t}$$

$$\mathrm{Prem}'(t, m) = \begin{cases} 0 & \text{in caso di premio unico} \\ P\,\ddot{a}'_{x+t:m-t\rceil} & \text{in caso di premi annui costanti} \end{cases}$$

Per $t = 0, 1, \ldots, m-1$:

$$\mathrm{Ben}'(t, t+1) = {}_1A'_{x+t} = P_t^{[\mathrm{N}]}$$

$$\mathrm{Prem}'(t, t+1) = \begin{cases} \mathit{\Pi} & \text{in caso di premio unico, se } t = 0 \\ 0 & \text{in caso di premio unico, se } t \geq 1 \\ P & \text{in caso di premi annui costanti} \end{cases}$$

5.3 LA RISERVA MATEMATICA DI UN CONTRATTO

DEFINIZIONE

Rif. intervallo (t, m), con $0 \leq t \leq m$

Sia V_t l'importo tale che:

$$\mathrm{Prem}'(t, m) + V_t = \mathrm{Ben}'(t, m)$$

In particolare, si ha

$$V_0 = \mathrm{Ben}'(0, m) - \mathrm{Prem}'(0, m) = 0$$

Per $t > 0$, l'importo V_t soddisfa il principio di equità quando sono considerati benefici e premi "residui"

Se $\mathrm{Ben}'(t, m) > \mathrm{Prem}'(t, m)$:

- assicuratore in posizione debitoria $\Rightarrow$ condizione di finanziamento espressa da $V_t > 0$ ($V_t \geq 0$: non credito)
- importo V_t assieme ai futuri premi finanzia (in valore attuariale) i futuri benefici

La riserva matematica di un contratto *(cont.)*

La quantità

$$V_t = \mathrm{Ben}'(t,m) - \mathrm{Prem}'(t,m)$$

è chiamata *riserva matematica prospettiva (pura)* del contratto

- “prospettiva”: la riserva si riferisce all’intervallo di tempo “futuro” (da t in avanti)
- “pura”: non si considerano spese e relativi caricamenti

Ipotesi: riserva calcolata con la base tecnica $\mathrm{TB1}$
$\Rightarrow$ valutazione prudenziale del debito dell’assicuratore

- ◦ caricamento implicito di sicurezza
- ◦ “grado” di prudenza non facilmente determinabile

RISERVA MATEMATICA PER ALCUNI PRODOTTI ASSICURATIVI

Rif. a prodotti assicurativi

- con benefici unitari
- a premi annui costanti pagabili per tutta la durata contrattuale, se non diversamente specificato

Assicurazione a vita intera caso morte

- premi vitalizi:

$$V_t = A'_{x+t} - P\,\ddot{a}'_{x+t}$$

- premi temporanei s anni:

$$V_t = \begin{cases} A'_{x+t} - P(s)\,\ddot{a}'_{x+t:s-t\rceil} & \text{se } t < s \\ A'_{x+t} & \text{se } t \geq s \end{cases}$$

Assicurazione temporanea caso morte:

$$V_t = {}_{m-t}A'_{x+t} - P\,\ddot{a}'_{x+t:m-t\rceil}$$

Assicurazione di capitale differito:

$$V_t = {}_{m-t}E'_{x+t} - P\,\ddot{a}'_{x+t:m-t\rceil}$$

Assicurazione mista ordinaria:

$$V_t = A'_{x+t,m-t\rceil} - P\,\ddot{a}'_{x+t:m-t\rceil}$$

Rif. a prodotti assicurativi

- con benefici unitari
- a premio unico

Assicurazione di capitale differito:

$$V_t = {}_{m-t}E'_{x+t}$$

Rendita vitalizia immediata anticipata:

$$V_t = \ddot{a}'_{x+t}$$

Rif. a prodotti assicurativi a premio unico ricorrente

Assicurazione di capitale differito:

$$V_t = {}_{m-t}E'_{x+t} \sum_{h=0}^{t-1} \Delta S_h = S_t \, {}_{m-t}E'_{x+t}$$

Assicurazione a vita intera caso morte:

$$V_t = A'_{x+t} \sum_{h=0}^{t-1} \Delta C_h = C_t \, A'_{x+t}$$

In particolare, se $i' = 0$:

$$V_t = \sum_{h=0}^{t-1} \mathit{\Pi}_h$$

PROFILO TEMPORALE DELLA RISERVA MATEMATICA

Riserva matematica V_t:

- funzione del tempo t
- nell'ipotesi assicurato in vita al tempo t

Calcolata adottando $\mathrm{TB1} \;\Rightarrow\; V_0 = 0$

In caso di premio unico, Π, usuale considerare la riserva subito dopo l'introito del premio unico:

$$V_{0^+} = V_0 + \Pi = \Pi$$

Riserva a scadenza (tempo m) per un'assicurazione temporanea:

$$V_m = 0$$

per una assicurazione di capitale differito ed una mista ordinaria (capitale unitario):

$$V_m = 1$$

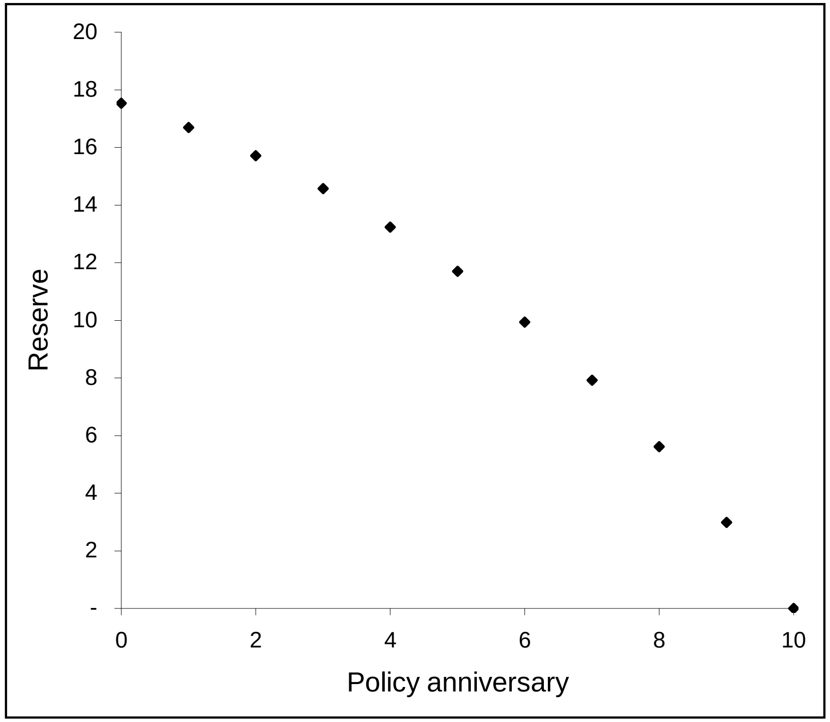
Negli esempi seguenti: profilo temporale per $t = 1, 2, \ldots$ (anniversari di contratto), coerente con il modello discreto rispetto al tempo

Esempio 1

Assicurazione temporanea caso morte (capitale costante)

Notare:

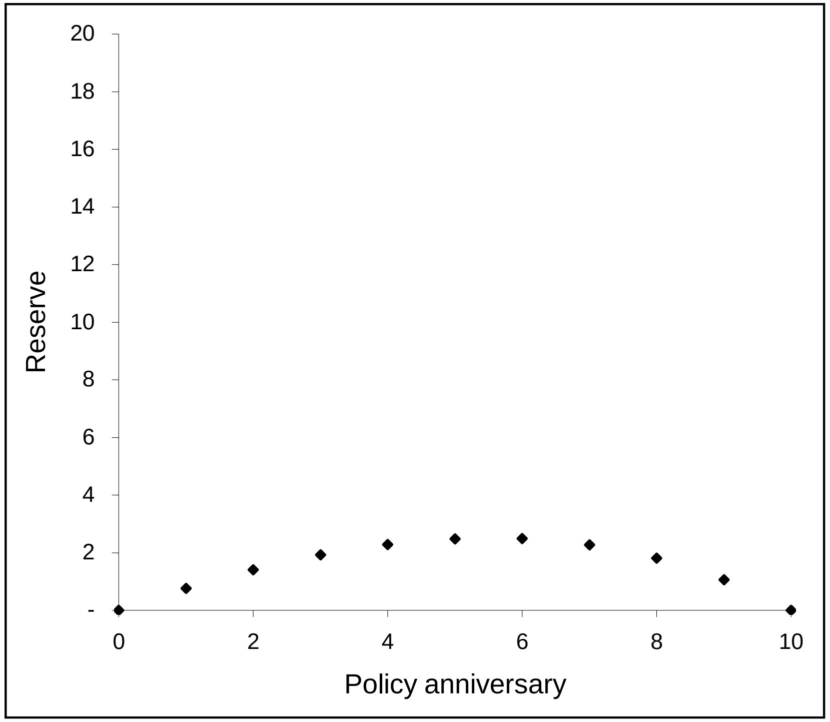
- riserva molto piccola in relazione al capitale assicurato
- caso di premio unico: premio progressivamente impiegato in mutualità $\Rightarrow$ riserva decrescente lungo tutta la durata
- caso di premi annui costanti: riserva
  - inizialmente crescente, perché i premi costanti eccedono i corrispondenti premi naturali
  - quindi decrescente, e nulla a scadenza (l'assicuratore non ha da pagare benefici se l'assicurato è in vita a scadenza)



Assic. temporanea; premio unico

$C = 1\,000$, $x = 40$, $m = 10$,

$\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$

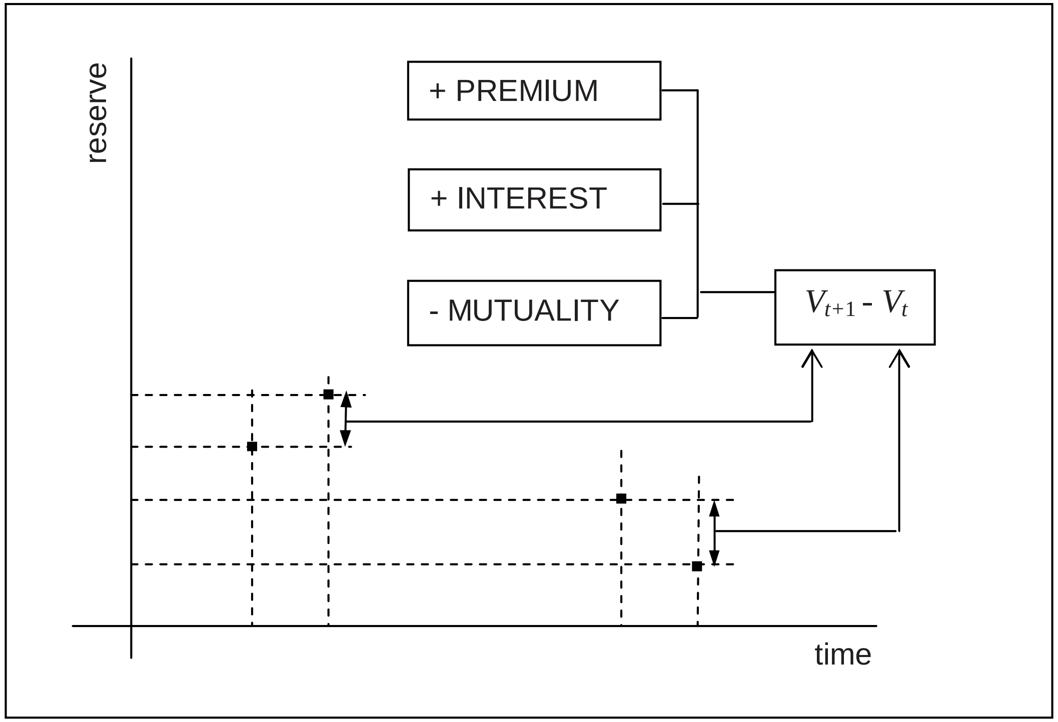


Assic. temporanea; premi annui cost.

$C = 1\,000$, $x = 40$, $m = 10$,

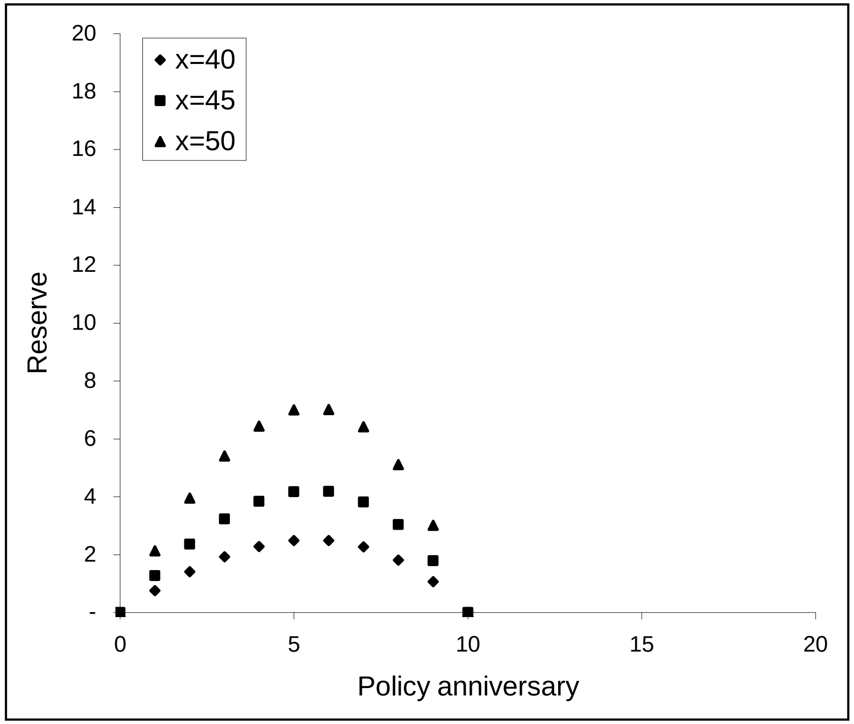
$\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$

La riserva matematica di un contratto *(cont.)*

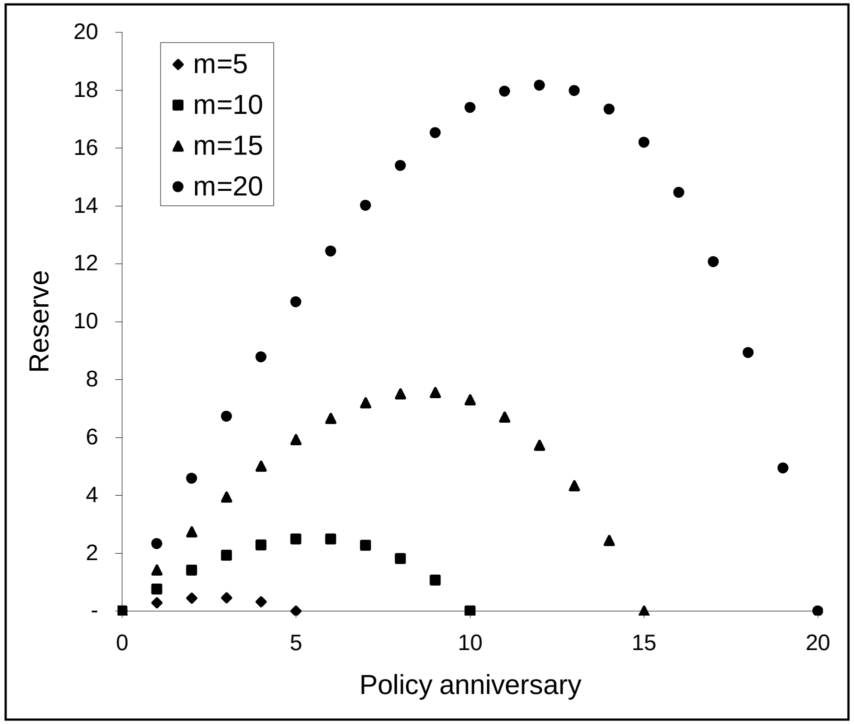


Variazioni annuali della riserva di un'assicurazione temporanea caso morte (premi annui costanti)

La riserva matematica di un contratto *(cont.)*



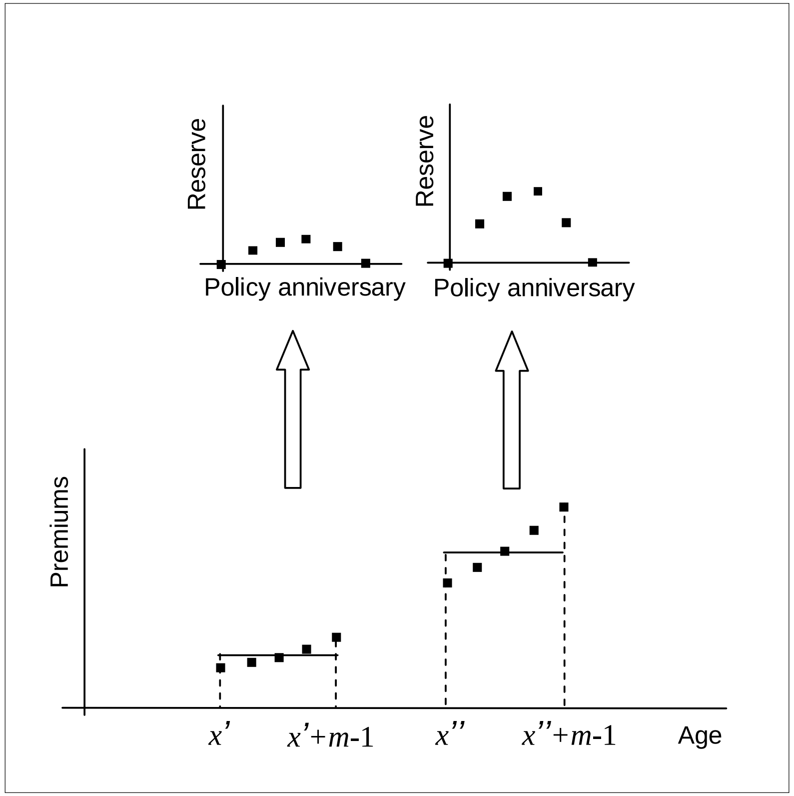
Assicurazioni temporanee,
con varie età all'ingresso;
premi annui costanti
$C = 1\,000$, $m = 10$, $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$



Assicurazioni temporanee,
con varie durate;
premi annui costanti
$C = 1\,000$, $x = 40$, $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$

La riserva matematica di un contratto *(cont.)*

- profilo di riserva tanto più alto quanto maggiore è l'età all'ingresso (vedi escursione dei premi naturali lungo la durata del contratto)



Relazione tra andamento dei premi naturali di un'assicurazione temporanea caso morte e profilo della riserva in caso di premi annui costanti

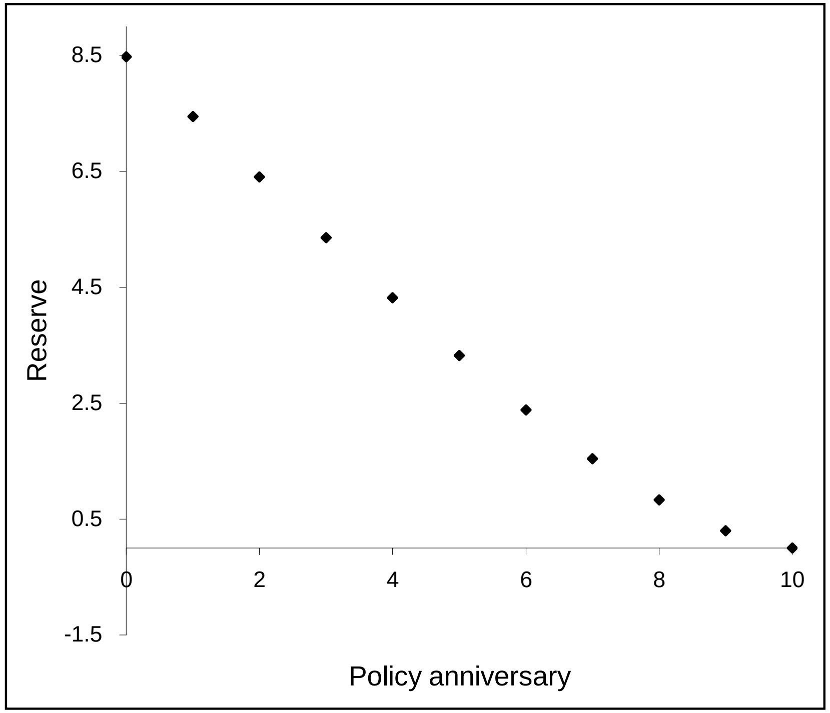
Esempio 2

Assicurazione temporanea decrescente.

Notare:

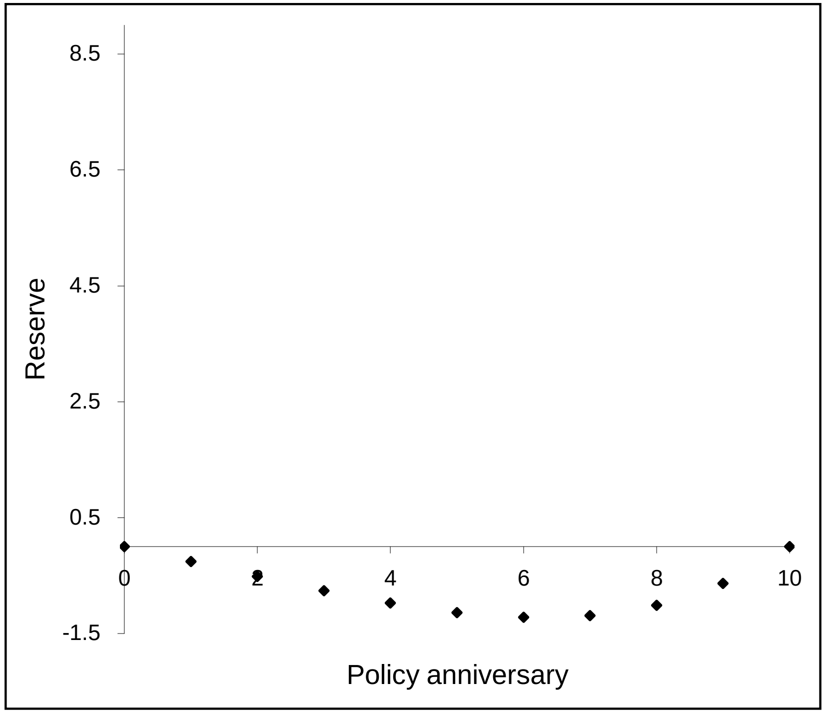
- premi annui costanti pagabili per tutta la durata contrattuale $\Rightarrow$ violazione della condizione di finanziamento
- abbreviazione periodo pagamento premi
  $s = 8 \Rightarrow$ insufficiente
  $s = 7 \Rightarrow$ soddisfa la condizione di finanziamento

La riserva matematica di un contratto *(cont.)*



Assic. temporanea decrescente;
premio unico

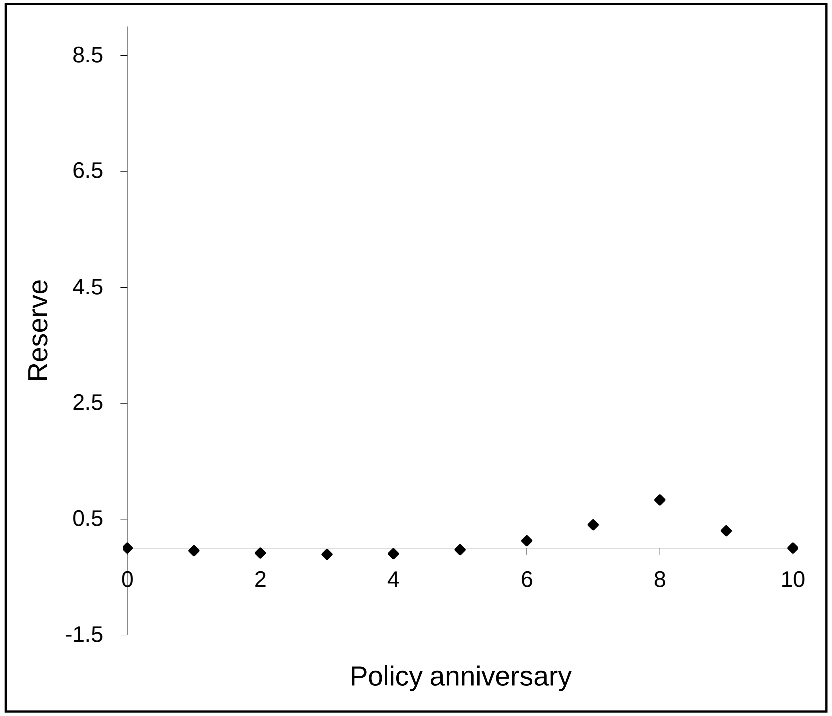
$$C_h = \frac{m-h+1}{m}\,1\,000, \quad x = 40,\ m = 10,$$
$$\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$$



Assic. temporanea decrescente;
premi annui costanti

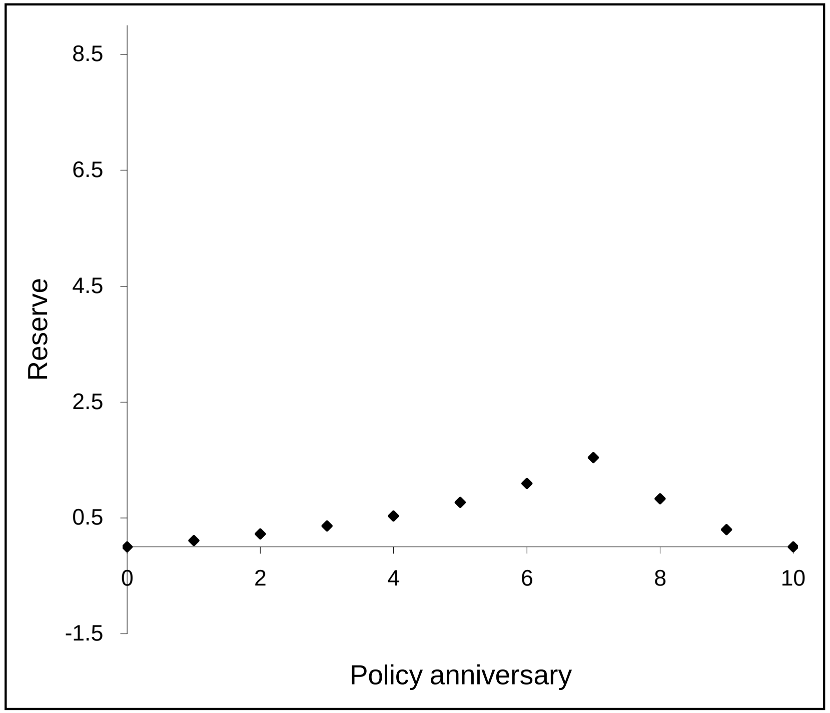
$$C_h = \frac{m-h+1}{m}\,1\,000, \quad x = 40,\ m = 10,$$
$$s = 10,\ \mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$$

La riserva matematica di un contratto *(cont.)*



Assic. temporanea decrescente;
premi annui cost. abbreviati

$C_h = \frac{m-h+1}{m} 1\,000, \quad x = 40, \, m = 10,$
$s = 8, \, \mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$



Assic. temporanea decrescente;
premi annui cost. abbreviati

$C_h = \frac{m-h+1}{m} 1\,000, \quad x = 40, \, m = 10,$
$s = 7, \, \mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$

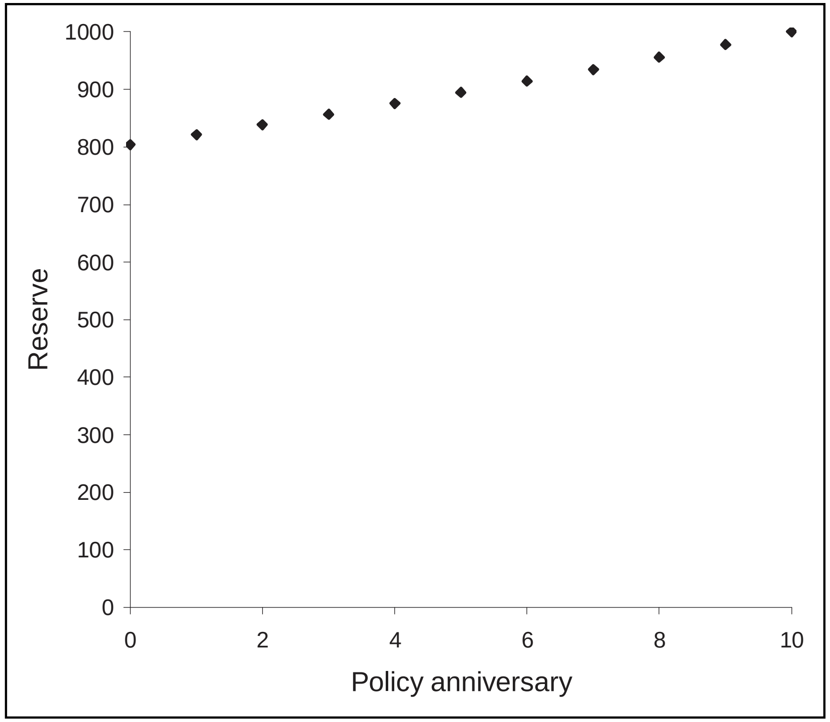
Esempio 3

Assicurazione di capitale differito.

Notare:

- riserva crescente su tutta la durata contrattuale, sia in caso di premio unico che in caso di premio annuo
- cause di incremento annuo della riserva: vedi Figura
- in particolare, ciascuna riserva individuale è annualmente accreditata con una quota delle riserve rilasciate dagli assicurati deceduti nell'anno

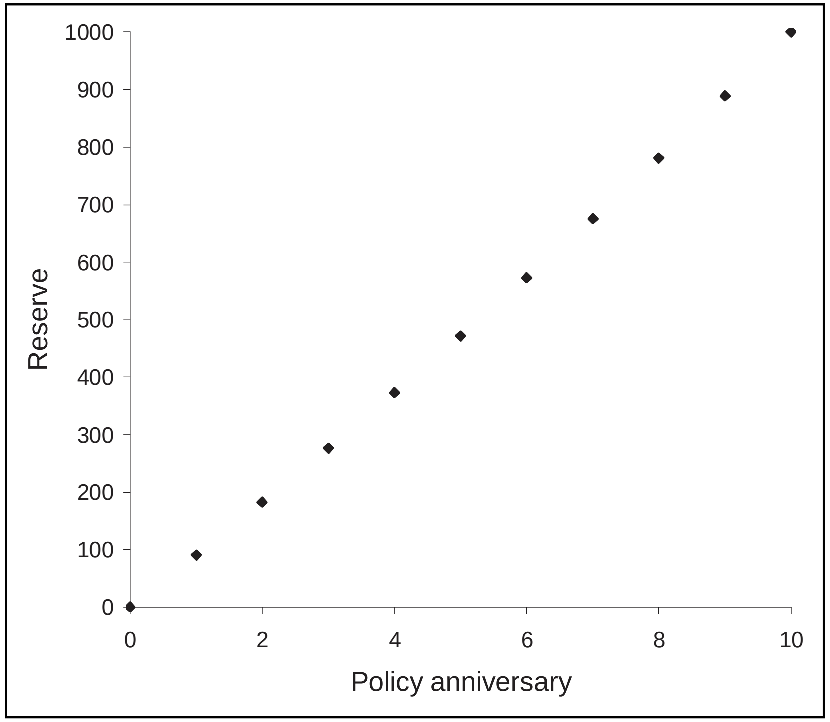
La riserva matematica di un contratto *(cont.)*



Assic. di capitale differito; premio unico

$C = 1\,000$, $x = 40$, $m = 10$,

$\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$

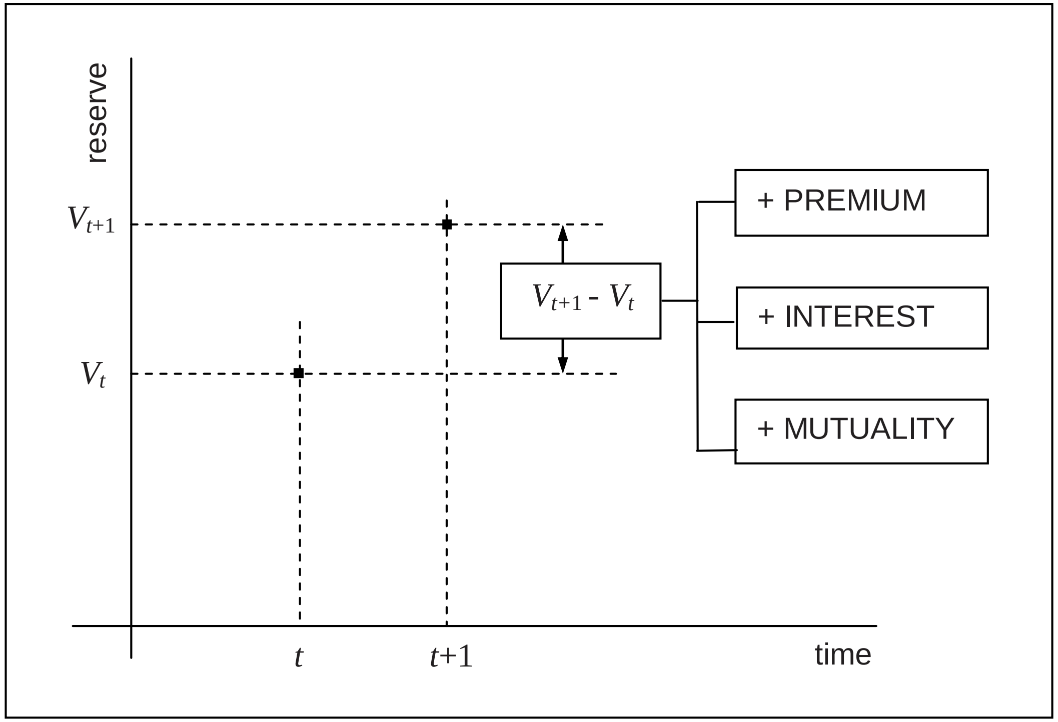


Assic. di capitale diff.; premi annui cost.

$C = 1\,000$, $x = 40$, $m = 10$,

$\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$

La riserva matematica di un contratto *(cont.)*



Variazione annuale della riserva di un'assicurazione di capitale differito (premi annui costanti)

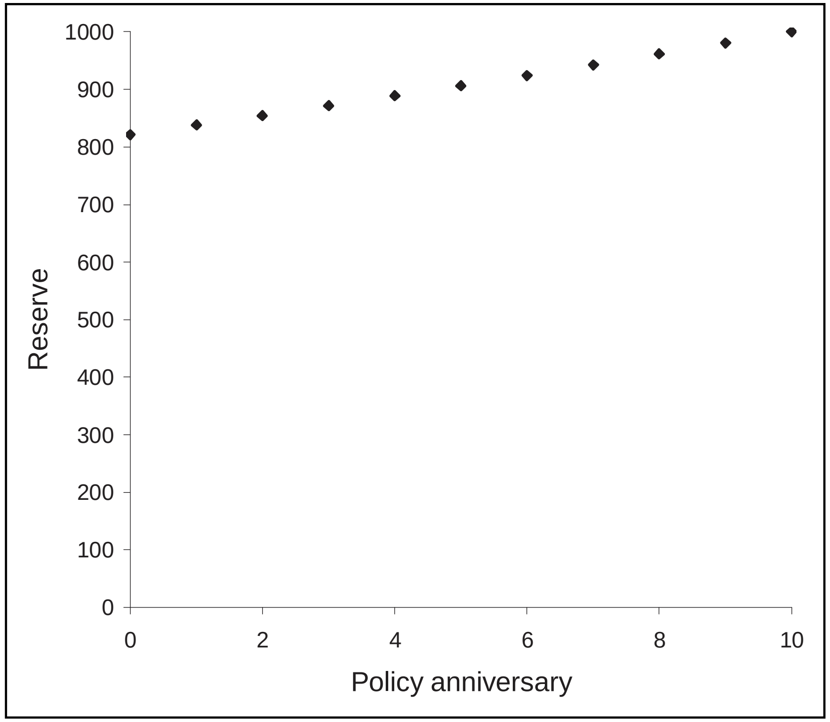
Esempio 4

Assicurazione mista ordinaria.

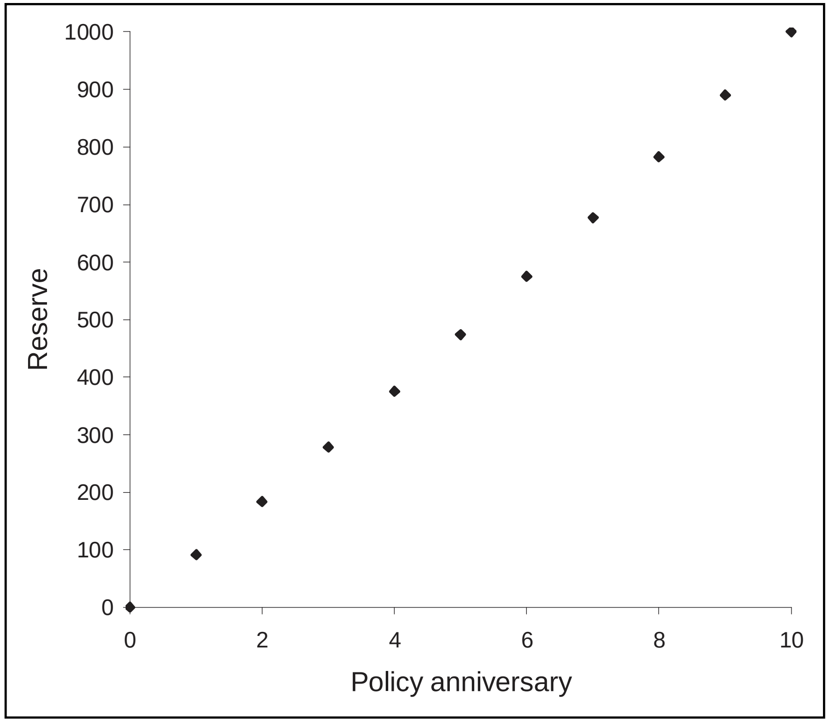
Notare:

- profilo temporale quasi coincidente con quello relativo ad assic. di capitale differito (differenza tra le due riserve = riserva di una temporanea caso morte, assumendo la stessa base tecnica $\mathrm{TB1}$ nei tre prodotti assicurativi)
- effetto della mutualità diverso: “positivo” nell’assicurazione di capitale differito, “negativo” nell’assicurazione mista

La riserva matematica di un contratto *(cont.)*

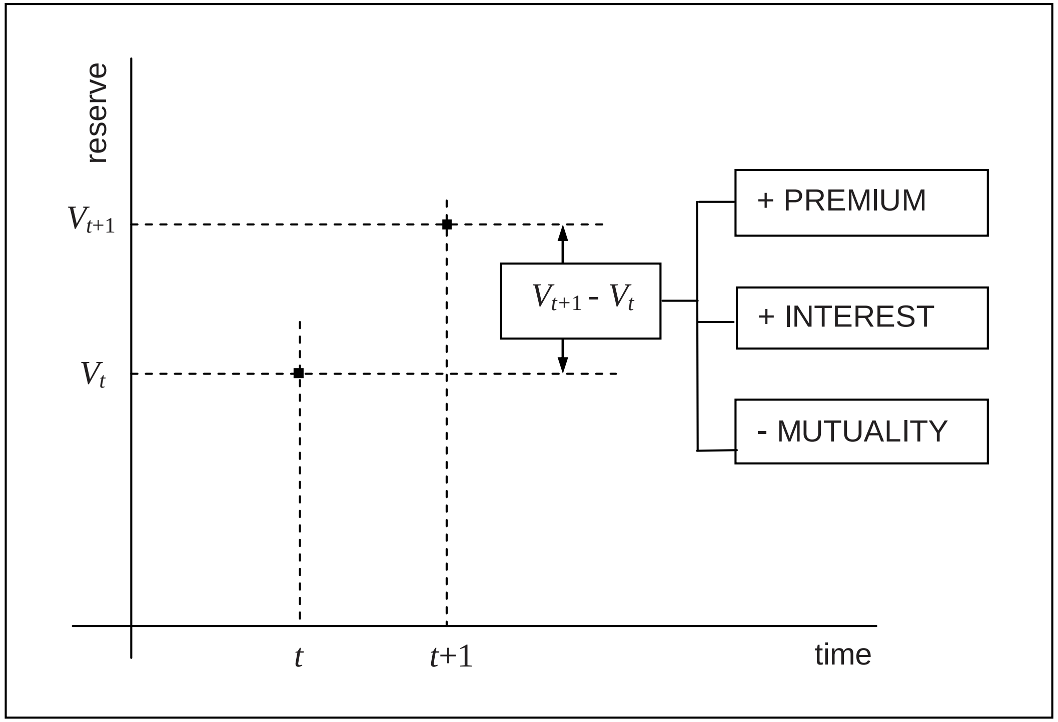


Assic. mista ordinaria;
premio unico
$C = 1\,000$, $x = 40$, $m = 10$,
$\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$



Assic. mista ordinaria;
premi annui costanti
$C = 1\,000$, $x = 40$, $m = 10$,
$\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$

La riserva matematica di un contratto *(cont.)*



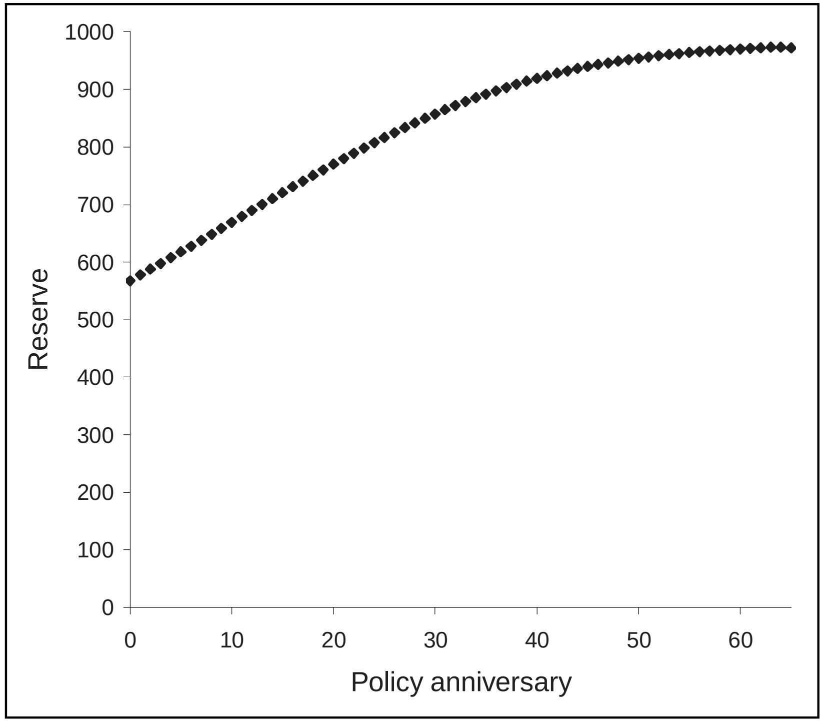
Variazione annuale della riserva di un'assicurazione mista ordinaria (premi annui costanti)

Esempio 5

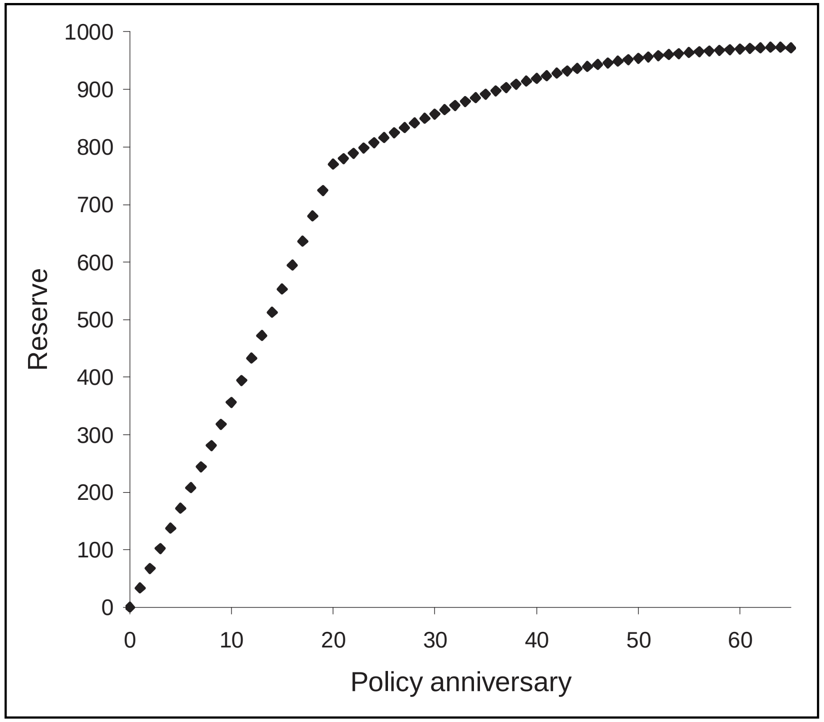
Assicurazione a vita intera caso morte

Notare:

- profilo temporale crescente, sia in caso di premio unico che in caso di premi annui costanti
- tende alla somma assicurata C
- in caso di premi annui, dopo completato il pagamento premi il profilo della riserva coincide con quello del caso di premio unico



Assic. a vita intera caso morte;
premio unico
$C = 1\,000$, $x = 50$, $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$



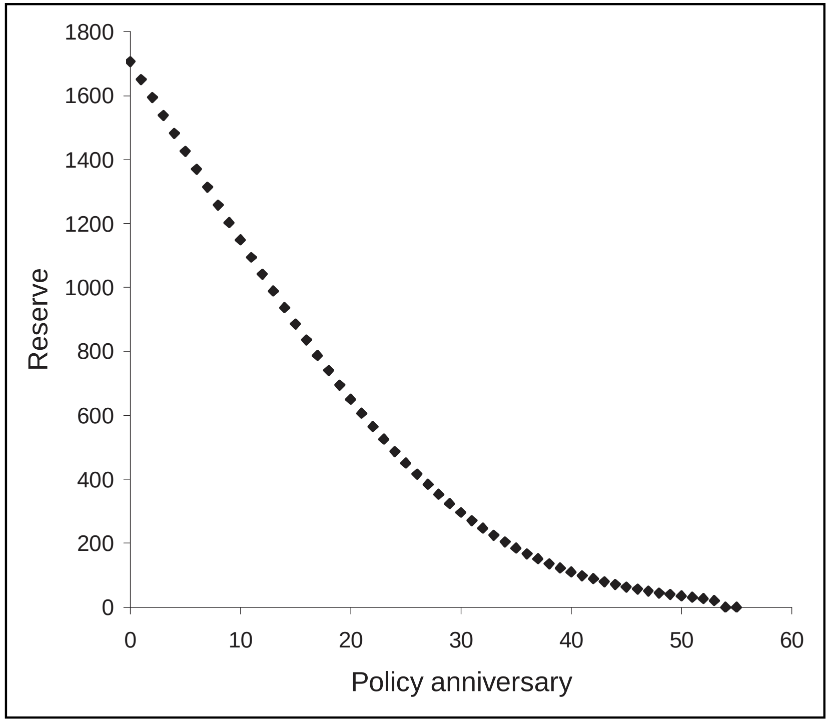
Assic. a vita intera caso morte;
premi annui cost. temporanei
$C = 1\,000$, $x = 50$, $s = 20$,
$\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$

Esempio 6

Rendita vitalizia immediata.

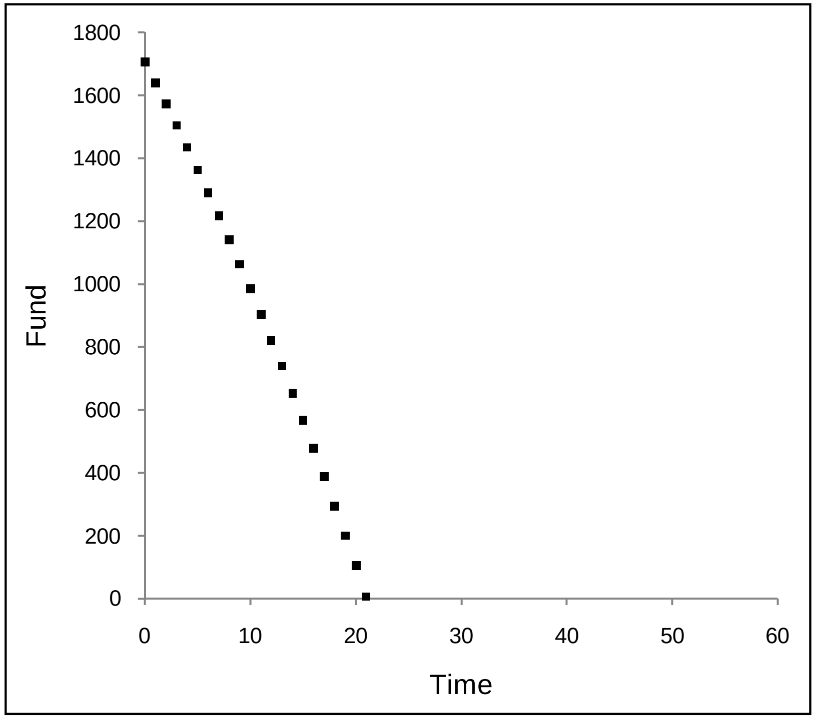
Notare:

- riserva decrescente lungo tutta la durata
- cause di decremento annuo della riserva: vedi Figura
- mutualità come nell'assicurazione di capitale differito
- confronto con l'andamento del fondo in un processo di prelevamento



Riserva della rendita vitalizia immediata a premio unico

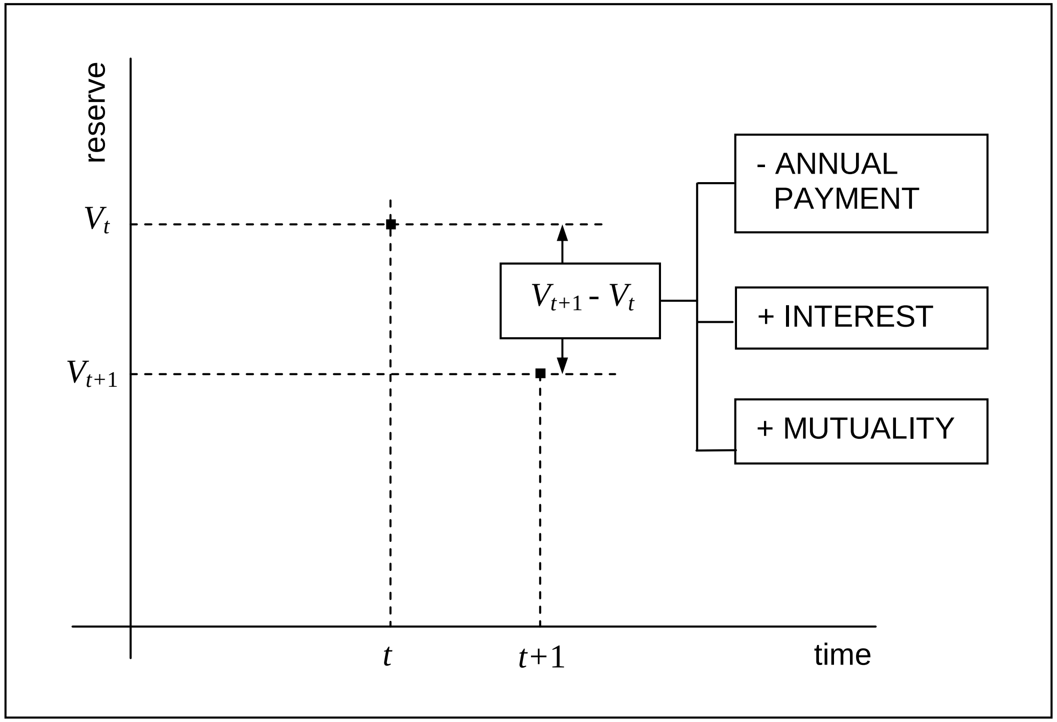
$b = 100$, $x = 65$, $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT4})$



Fondo e processo di prelevamento;

$b = 100$, $i = 0.02$

La riserva matematica di un contratto *(cont.)*



Variazione annuale della riserva
di una rendita vitalizia immediata (premio unico)

VARIAZIONE DELLA BASE TECNICA

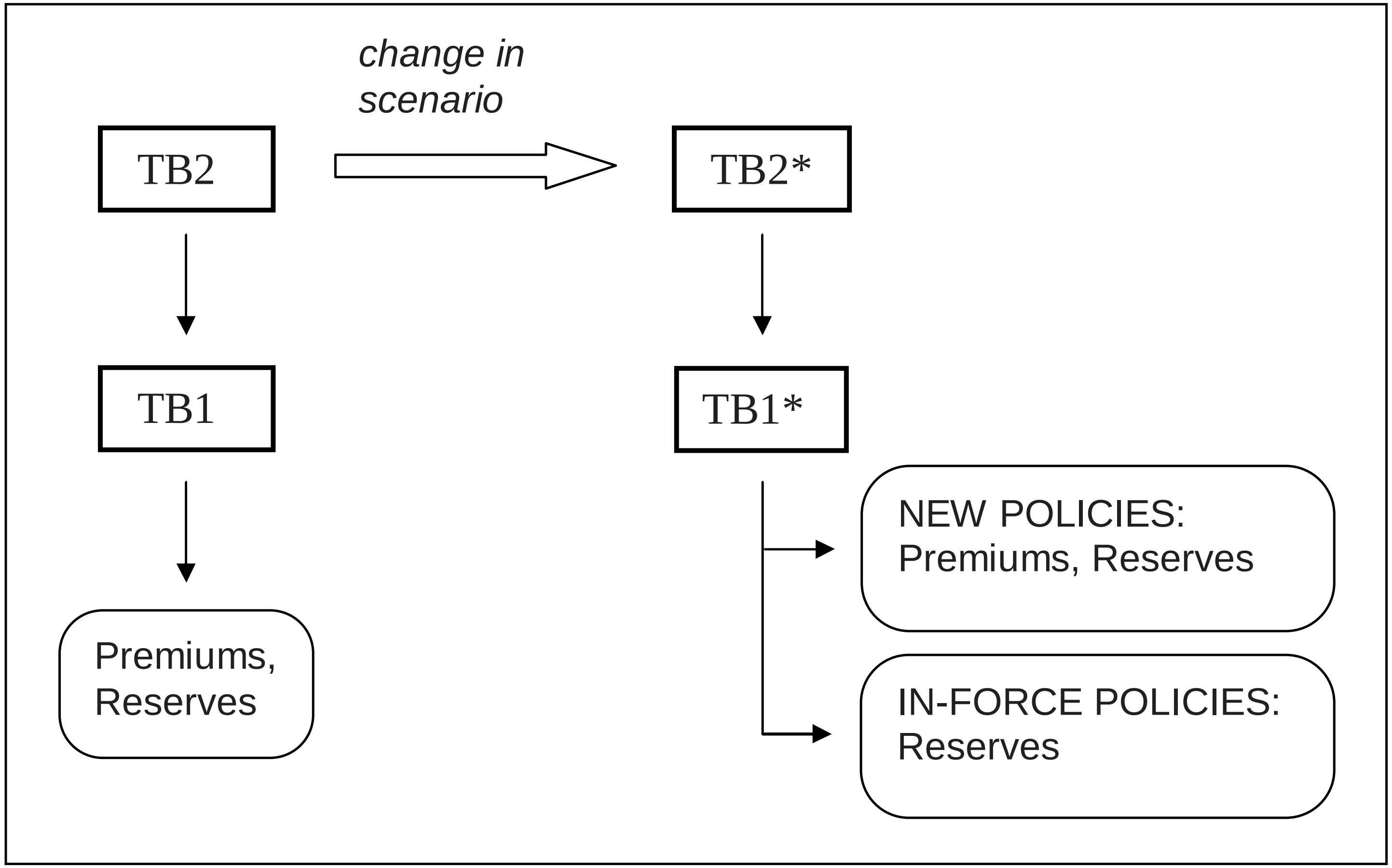
In alcune circostanze $\Rightarrow$ riserva calcolata con base tecnica (*reserving basis*, o *valuation basis*) diversa dalla base $\mathrm{TB1}$ impiegata per il calcolo dei premi. Per esempio:

1. una valutazione “realistica” del debito dell’assicuratore è richiesta allo scopo di determinare il caricamento di sicurezza implicito nella riserva calcolata con $\mathrm{TB1}$
2. significative variazioni dello scenario finanziario e/o demografico rendono la riserva (calcolata con $\mathrm{TB1}$) non più prudenziale, o viceversa troppo alta $\Rightarrow$ nuova base tecnica (di primo ordine) $\mathrm{TB1}^*$

Aspetto 1 analizzato più avanti

Analisi dell’aspetto 2

La riserva matematica di un contratto *(cont.)*



Passaggio a nuove basi tecniche a causa di variazioni di scenario

Per esempio, significative variazioni osservate nella mortalità, o differenti stime del rendimento degli investimenti $\Rightarrow$ variazione della riserva (eventualmente obbligatoria, imposta dall'autorità di controllo)

Logica della variazione di base tecnica: vedi Figura precedente

Consideriamo il caso di aumento della riserva per variazione di base tecnica; variazione al tempo τ

Riserva $V_\tau^{[\mathrm{u}]}$ con nuova base tecnica $\Rightarrow$ equità secondo la $\mathrm{TB1}^*$

$$V_\tau^{[\mathrm{u}]} + P\,\ddot{a}^*_{x+\tau:m-\tau\rceil} = C\,A^*_{x+\tau,m-\tau\rceil} \qquad (^\circ)$$

La riserva $V_\tau^{[\mathrm{u}]}$ garantisce la massima prudenzialità

Tuttavia il principio di equità non fa esplicito riferimento alla rischiosità ed alla prudenzialità (se non in termini di base tecnica)

Sono pertanto ammissibili anche altre soluzioni che realizzino l'equilibrio in termini di valori attesi

Più in generale, il principio di equità richiede:

$$(V_\tau + \Delta V_\tau) + (P + \Delta P)\, \ddot{a}^*_{x+\tau:m-\tau\rceil} = C\, A^*_{x+\tau,m-\tau\rceil} \qquad (^*)$$

Garanzia di premio $\Rightarrow$ ΔP (e ΔV_τ) a carico dell'assicuratore

La $(^*)$ è un'equazione nelle incognite ΔV_τ e ΔP $\Rightarrow$ infinite soluzioni

Soluzioni della $(^*)$ $\Rightarrow$ approcci al problema di variazione di base tecnica

Considereremo alcune soluzioni, ciascuna caratterizzata da un diverso "bilanciamento" tra incremento immediato della riserva (al tempo τ) e incrementi annui differiti

1. Immediata integrazione (completa) di riserva al tempo τ:

$$\varDelta V_\tau = V_\tau^{[\mathrm{u}]} - V_\tau$$

   e quindi $\varDelta P = 0$

   Massima prudenzialità

   Per ogni t ($t \geq \tau$) risulta:

$$V_t^{[\mathrm{u}]} = C\, A^*_{x+t,m-t\rceil} - P\, \ddot{a}^*_{x+t:m-t\rceil}$$

2. Integrazione parziale di riserva al tempo τ, seguita da integrazioni di premio (“pagate” dall’assicuratore) che ammortizzano la parte mancante di integrazione di riserva

$$0 < \varDelta V_\tau < V_\tau^{[\mathrm{u}]} - V_\tau \;\Rightarrow\; \varDelta P > 0$$

Soluzione particolare di specifico interesse pratico:

$$\Delta P = P^* - P$$

con

$$P^* = C \, \frac{A^*_{x,m\rceil}}{\ddot{a}^*_{x:m\rceil}}$$

premio annuo costante secondo la base tecnica $\mathrm{TB1}^*$ (richiesto ai nuovi contratti); dalla $(^*)$ si ha allora:

$$\Delta V_\tau = C \, A^*_{x+\tau,m-\tau\rceil} - P^* \, \ddot{a}^*_{x+\tau:m-\tau\rceil} - V_\tau$$

e quindi

$$V_\tau + \Delta V_\tau = C \, A^*_{x+\tau,m-\tau\rceil} - P^* \, \ddot{a}^*_{x+\tau:m-\tau\rceil} = V^*_\tau$$

e per $t \geq \tau$:

$$V^*_t = C \, A^*_{x+t,m-t\rceil} - P^* \ddot{a}^*_{x+t:m-t\rceil}$$

$\Rightarrow$ riserva risultante coincidente con la riserva dei nuovi contratti con premio secondo la $\mathrm{TB1}^*$

3. Integrazione di riserva ammortizzata sulla durata residua del contratto = $m - \tau$ anni

   Sia

$$\Delta V_\tau = 0$$

   e quindi dalla $(^*)$ si trova :

$$\Delta P = \frac{C\, A^*_{x+\tau,m-\tau\rceil} - P\, \ddot{a}^*_{x+\tau:m-\tau\rceil} - V_\tau}{\ddot{a}^*_{x+\tau:m-\tau\rceil}} = \frac{V_\tau^{[\mathrm{u}]} - V_\tau}{\ddot{a}^*_{x+\tau:m-\tau\rceil}}$$

   Profilo di riserva risultante:

$$\tilde{V}_t = C\, A^*_{x+t,m-t\rceil} - (P + \Delta P)\, \ddot{a}^*_{x+t:m-t\rceil}$$

   Soluzione non prudenziale

4. Integrazione di riserva ammortizzata in periodo più breve della durata residua del contratto

   Sia

   $$\Delta V_\tau = 0$$

   Si fissi r, $r < m$, e si ponga

   $$s = \max\{r - \tau, 0\}$$

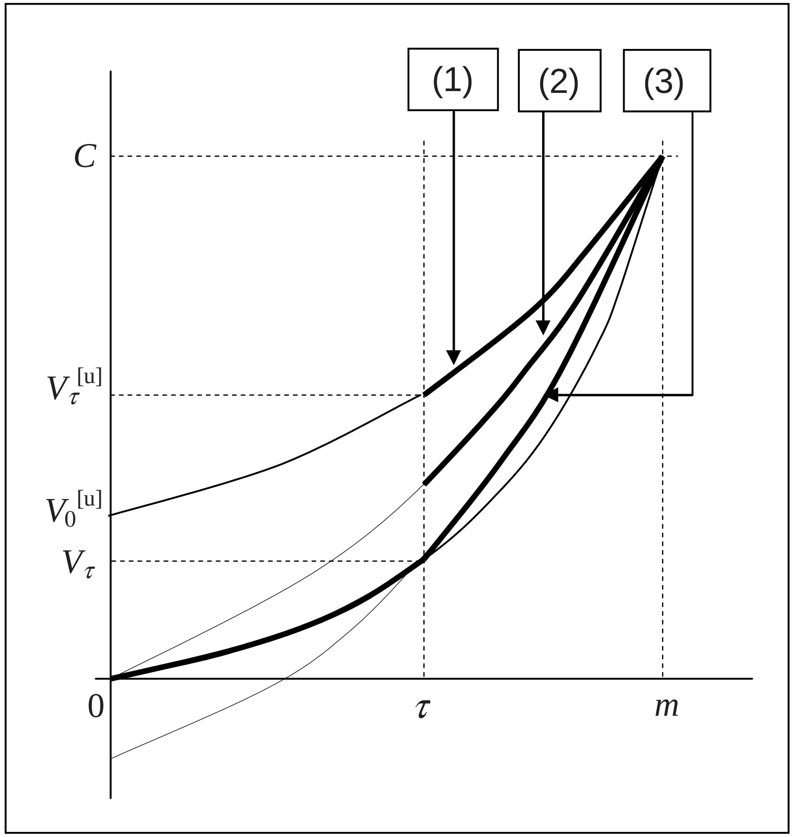
   - se $s \geq 1$, l'integrazione di premio per s anni è:

   $$Q = \frac{V_\tau^{[\mathrm{u}]} - V_\tau}{\ddot{a}^*_{x+\tau:s-\tau\rceil}}$$

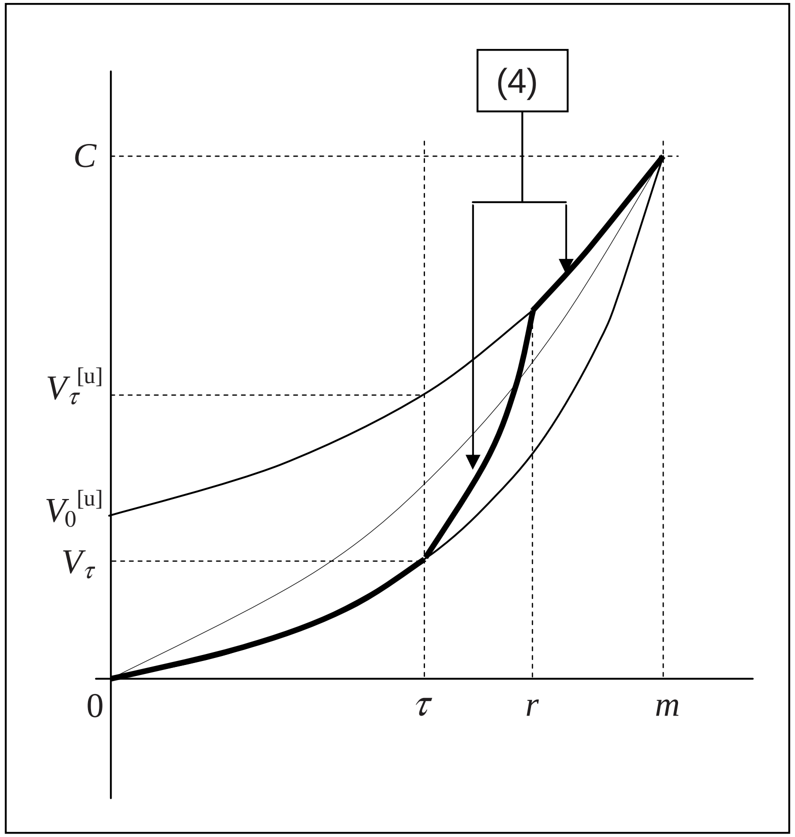
   - se $s = 0$, si ha ovviamente:

   $$Q = V_\tau^{[\mathrm{u}]} - V_\tau$$

La riserva matematica di un contratto *(cont.)*



Integrazione di riserva;
approcci base



Integrazione di riserva;
ammortamento abbreviato

Esempio

Rif. assicurazione mista ordinaria a premi annui costanti pagabili per l'intera durata del contratto

Dati: $C = 1\,000$, $x = 50$, $m = 15$; $\mathrm{TB1} = (0.03, \mathrm{LT1})$

Premio annuo $P = 55.13$

Al tempo $\tau = 8$, diminuzione del tasso di interesse
$\Rightarrow$ passaggio a $\mathrm{TB1}^* = (0.01, \mathrm{LT1})$

Premio annuo risultante $P^* = 64.27$

Tabella: riserva V_t (basata su $\mathrm{TB1}$), e riserve $V_t^{[\mathrm{u}]}$, V_t^*, e $\tilde{V}_t$, per $t \geq \tau$

La riserva matematica di un contratto *(cont.)*

t	V_t	$V_t^{[u]}$	V_t^*	$\tilde{V}_t$
		(1)	(2)	(3)
0	0.00			
1	53.59			
2	108.64			
3	165.21			
4	223.37			
5	283.19			
6	344.75			
7	408.16			
8	473.51	570.03	509.62	473.51
9	540.95	628.54	576.35	545.16
10	610.63	687.83	643.97	617.76
11	682.71	747.99	712.59	691.43
12	757.42	809.14	782.33	766.30
13	835.00	871.41	853.35	842.55
14	915.74	934.97	925.83	920.37
15	1 000.00	1 000.00	1 000.00	1 000.00

Integrazione di riserva per variazione di base tecnica

RISERVA MATEMATICA PER ANTIDURATE FRAZIONARIE

Interesse pratico: per es., necessità di calcolare le riserve di contratto (e la riserva di portafoglio) ad epoche diverse dagli anniversari di contratto per quantificare voci del bilancio d'esercizio

Approcci:

1. calcolo di valori "esatti" mediante modello a tempo continuo
2. approssimazioni mediante procedure di interpolazione, in particolare con formule lineari (approccio consueto nella pratica assicurativa)

Consideriamo l'approccio 2

Assicurazione a premi naturali

Esempio: temporanea caso morte

Riserva nulla a tutti gli anniversari di contratto, prima di incassare il premio $\Rightarrow$ $V_t = 0$ per ogni t intero

Dopo incassato il premio $\Rightarrow$ debito dell'assicuratore (ed attivo corrispondente) uguale al premio stesso:

$$V_{t^+} = P_t^{[\mathrm{N}]}; \;\; t = 0, 1, \dots$$

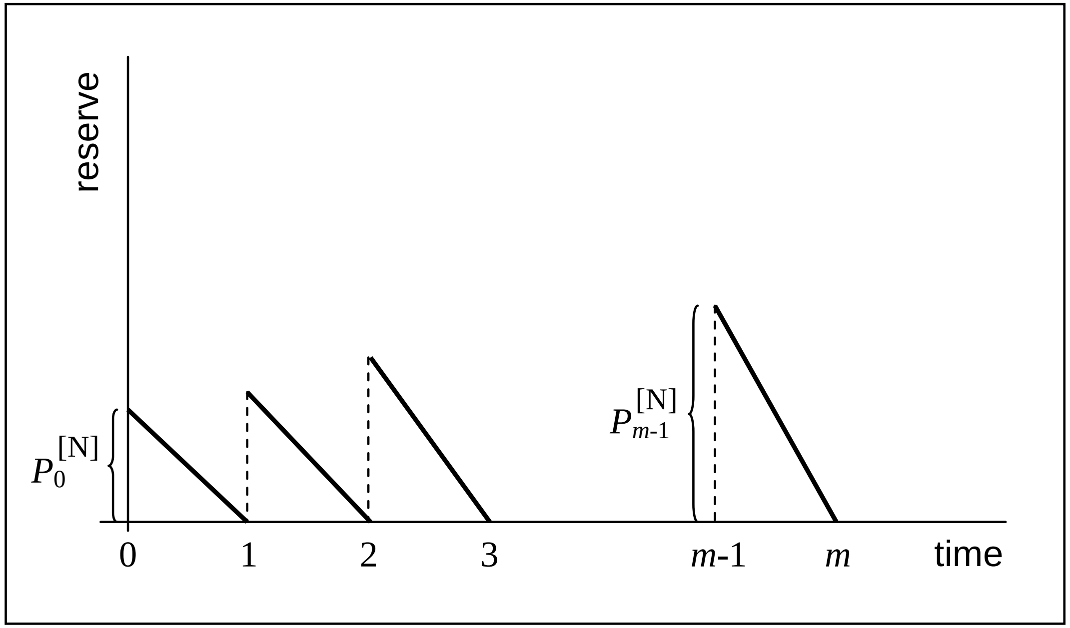
Successivamente, premio "consumato" nell'anno in base al meccanismo di mutualità e quindi $V_{t+1} = 0$

Al tempo $t + r$, con $0 < r < 1$, si assuma:

$$V_{t+r} = (1 - r)\, V_{t^+} = (1 - r)\, P_t^{[\mathrm{N}]}$$

Vedi Figura

La riserva matematica di un contratto *(cont.)*



Profilo della riserva per interpolazione; caso dei premi naturali

Assicurazione a premi annui costanti

Esempio: mista ordinaria

Dopo incassato il premio al tempo t: $V_t \rightarrow V_{t^+}$:

$$V_{t^+} = V_t + P$$

Interpolazione lineare:

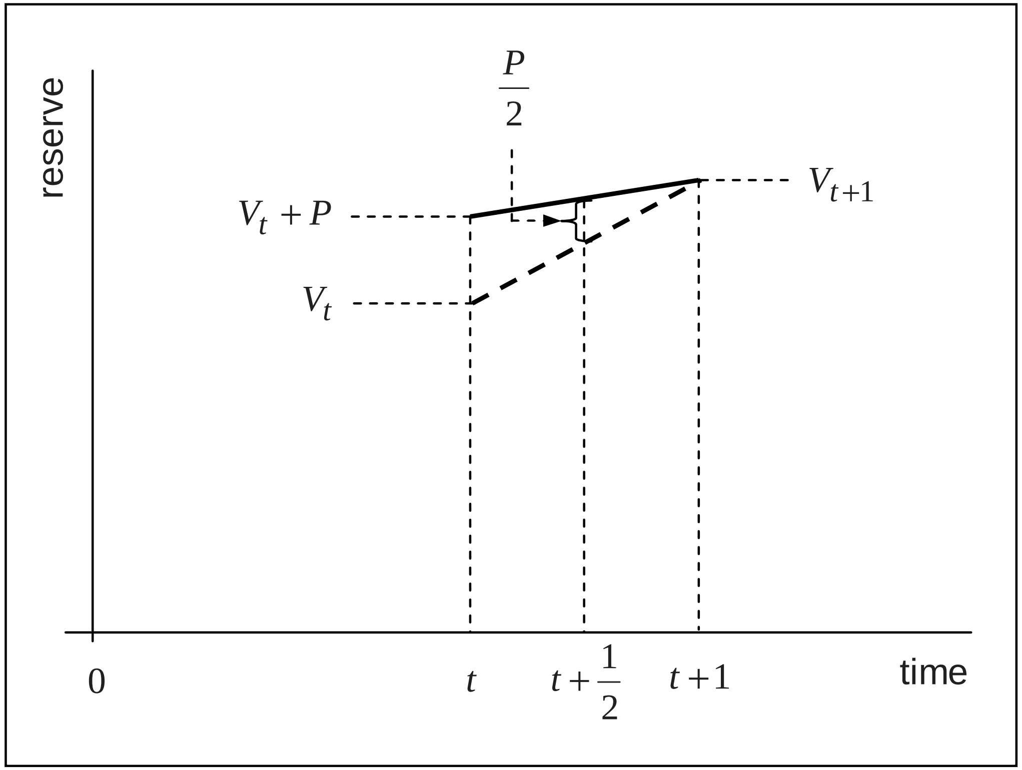
$$V_{t+r} = (1-r)\, V_{t^+} + r\, V_{t+1} = [(1-r)\, V_t + r\, V_{t+1}] + (1-r)\, P$$

Vedi Figura

Nota:

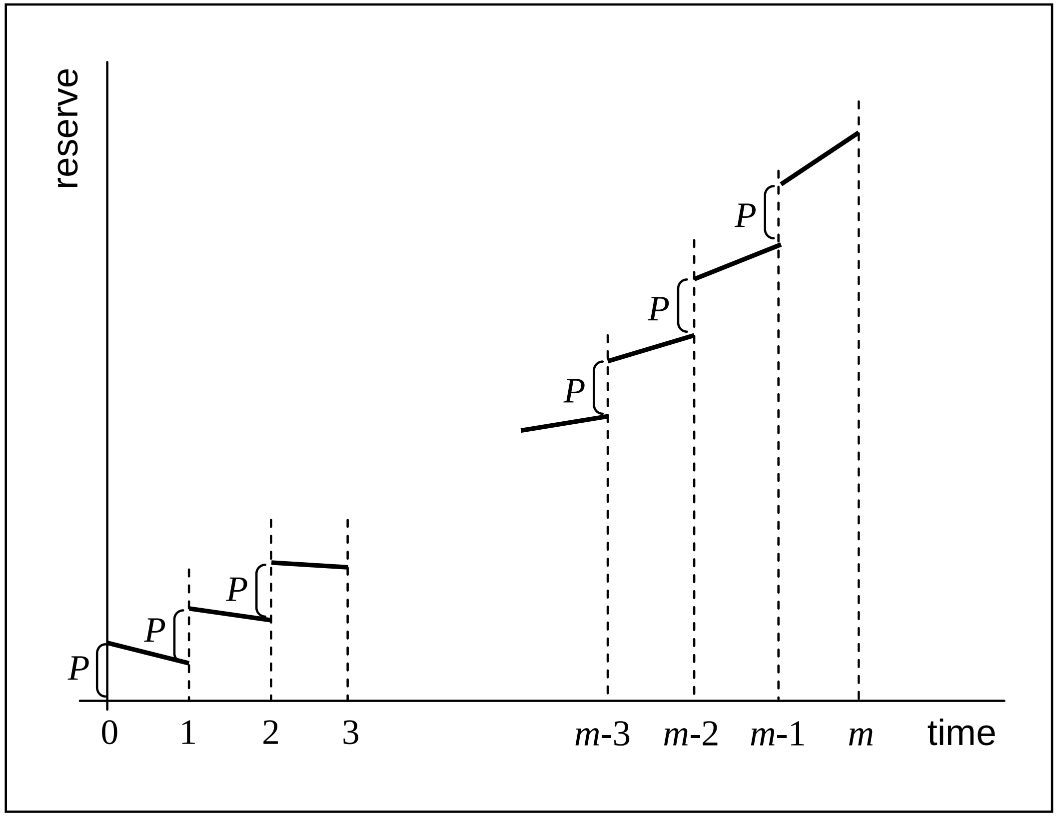
- interpolare tra V_t (anziché V_{t^+}) e V_{t+1} $\Rightarrow$ sottostima ad ogni istante tra t e $t+1$
- “uso” del premio P dipende dallo specifico prodotto assicurativo

  assicurazione mista ordinaria: quota di premio consumata per finanziare benefici caso morte (mutualità) decrescente all’aumentare dell’antidurata $\Rightarrow$ profilo temporale come in Figura



Interpolazione della riserva; caso dei premi annui costanti

La riserva matematica di un contratto *(cont.)*



Esempio di profilo della riserva per interpolazione;
caso dei premi annui costanti

Assicurazione a premio unico

Esempi: temporanea caso morte, mista ordinaria, capitale differito

Nessun “salto” nel profilo della riserva, tranne al pagamento del premio: $V_0 = 0 \;\rightarrow\; V_{0+} = \Pi$

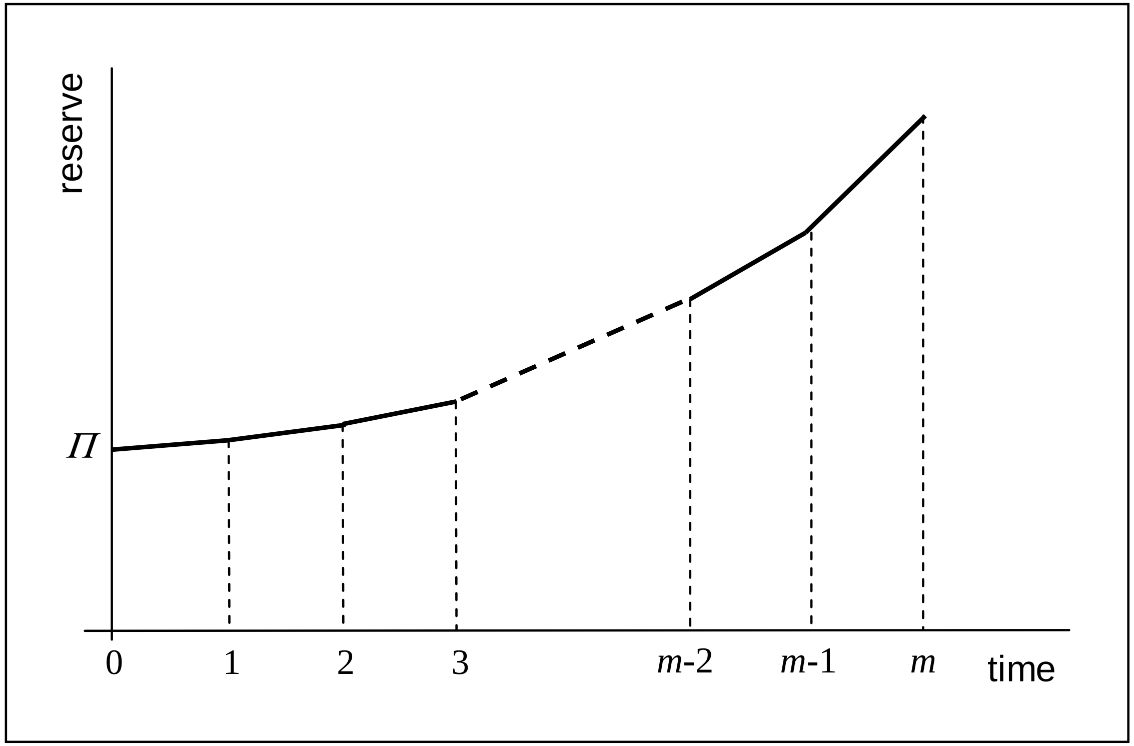
Interpolazione:

$$V_r = (1-r)\, V_{0+} + r\, V_1$$

$$V_{t+r} = (1-r)\, V_t + r\, V_{t+1} \quad \text{per } \; t = 1, 2, \dots$$

Vedi Figura

La riserva matematica di un contratto *(cont.)*



Profilo della riserva per interpolazione; assicurazione mista a premio unico

Rendita vitalizia immediata

Premio unico, beneficio annuo b

Salti nel profilo della riserva in corrispondenza al pagamento del beneficio annuo. Si ponga $V_{0^+} = \Pi$

Rendita vitalizia *posticipata* (vedi Figura (a)):

$$V_r = (1-r)\,V_{0^+} + r\,(V_1 + b)$$

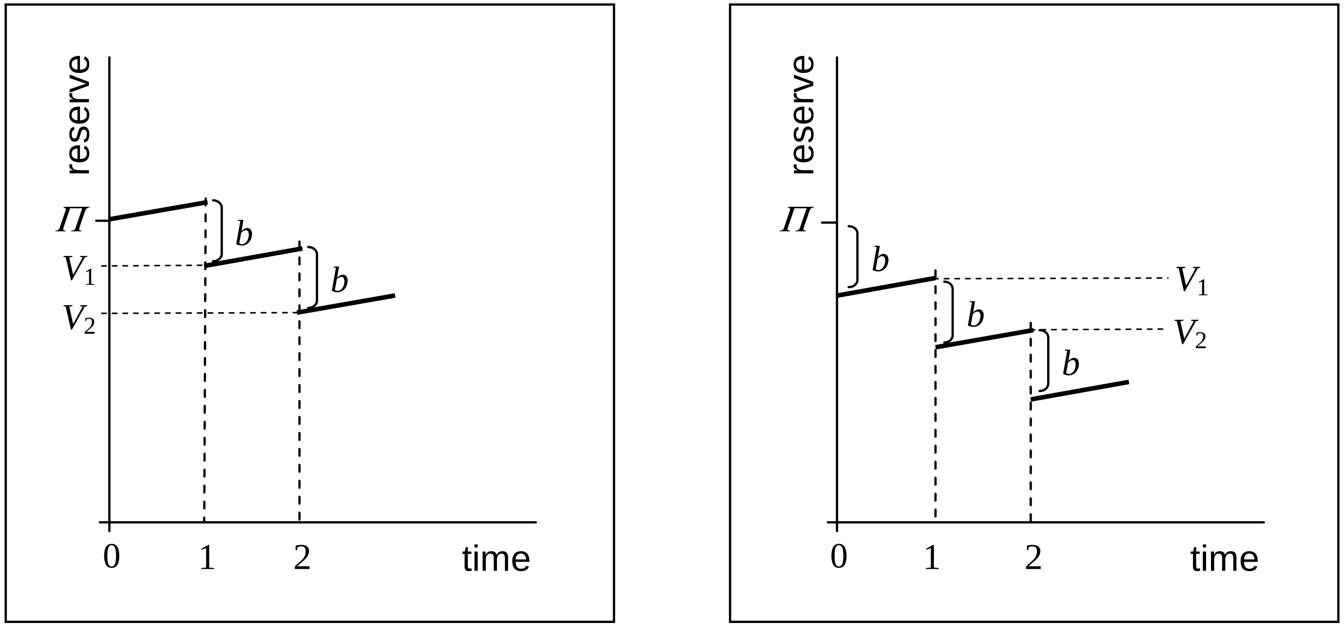
$$V_{t+r} = (1-r)\,V_t + r\,(V_{t+1} + b) \quad \text{per } t = 1, 2, \dots \quad (\text{con } V_t = a'_{x+t})$$

Rendita vitalizia *anticipata* (vedi Figura (b)):

$$V_r = (1-r)\,(V_{0^+} - b) + r\,V_1$$

$$V_{t+r} = (1-r)\,(V_t - b) + r\,V_{t+1} \quad \text{per } t = 1, 2, \dots \quad (\text{con } V_t = \ddot{a}'_{x+t})$$

La riserva matematica di un contratto *(cont.)*



(a) (b)

Profilo della riserva della rendita vitalizia per interpolazione

(a) rendita posticipata *(b) rendita anticipata*

RISERVA RETROSPETTIVA

Riferimento alla disuguaglianza

$$\mathrm{Prem}'(0,t) \lesseqgtr \mathrm{Ben}'(0,t)$$

Sia B_t l'importo tale che

$$\mathrm{Prem}'(0,t) = B_t + \mathrm{Ben}'(0,t)$$

Interpretazione: B_t = valore attuariale (al tempo 0) del beneficio che l'assicuratore dovrebbe pagare in t se l'assicurato decidesse (in t) di abbandonare il contratto, interrompendo il pagamento dei premi e rinunciando ai benefici seguenti t

Beneficio W_t, il cui valore attuariale in $t = 0$ è dato da B_t, definito dalla:

$$B_t = W_t \, {}_tE'_x$$

Pertanto

$$W_t = \frac{1}{{}_tE'_x} \big(\mathrm{Prem}'(0,t) - \mathrm{Ben}'(0,t)\big)$$

Quantità W_t = *riserva retrospettiva*

Condizione di finanziamento $\Rightarrow$ credito dell'assicurato $\Rightarrow$ $W_t \geq 0$

Osservazione

Interpretazione di W_t come ammontare da pagare all'assicurato in caso di abbandono richiede aggiustamenti, relativi a recupero spese dell'assicuratore e penalizzazione per abbandono del contratto (vedi Riscatto)

La riserva matematica di un contratto *(cont.)*

Prodotti assicurativi con beneficio caso morte, premio annuo costante P pagabile per tutta la durata contrattuale

Esempi: temporanea caso morte, vita intera caso morte, mista

Impegno dell'assicuratore: copertura del rischio morte nell'intervallo $(0, t)$

Per tutti questi prodotti, si ha:

$$W_t = \frac{1}{{}_tE'_x} \left(P\,\ddot{a}'_{x:t\rceil} - {}_tA'_x \right)$$

Capitale differito, premio annuo costante P pagabile per tutta la durata contrattuale

Nessun beneficio in $(0, t)$, quindi:

$$W_t = \frac{1}{{}_tE'_x} \, P \, \ddot{a}'_{x:t\rceil}$$

Prodotti assicurativi con beneficio caso morte, premio unico

Esempi: temporanea caso morte, vita intera caso morte, mista

Impegno dell'assicuratore: copertura del rischio morte nell'intervallo $(0, t)$

Per tutti questi prodotti, si ha:

$$W_t = \frac{1}{{}_tE'_x} \left(\mathit{\Pi} - {}_tA'_x \right)$$

La riserva matematica di un contratto *(cont.)*

Capitale differito, premio unico

$$W_t = \frac{1}{{}_tE'_x}\ \Pi = \frac{1}{{}_tE'_x}\ {}_mE'_x$$

Riserva prospettiva per capitale differito a premio unico:

$$V_t = {}_{m-t}E'_{x+t}$$

Inoltre

$${}_mE'_x = {}_tE'_x\ {}_{m-t}E'_{x+t}$$

pertanto:

$$W_t = V_t$$

$\Rightarrow$ coincidenza tra riserva prospettiva e retrospettiva

Coincidenza tra riserva prospettiva e retrospettiva: risultato valido in condizioni molto generali

Riferimento: assicurazione caso morte a vita intera, premi costanti P pagabili per tutta la durata contrattuale

Valgono le seguenti relazioni:

$$A'_x = {}_tA'_x + {}_tE'_x \; A'_{x+t}$$

$$\ddot{a}'_x = \ddot{a}'_{x:t\rceil} + {}_tE'_x \; \ddot{a}'_{x+t}$$

$$P\,\ddot{a}'_x = A'_x$$

Pertanto:

$$V_t = \underbrace{A'_{x+t} - P\,\ddot{a}'_{x+t}}_{\text{riserva prospettiva}} = \frac{A'_x - {}_tA'_x}{{}_tE'_x} - P\,\frac{\ddot{a}'_x - \ddot{a}'_{x:t\rceil}}{{}_tE'_x} = \underbrace{\frac{1}{{}_tE'_x}\left(P\,a'_{x:t\rceil} - {}_tA'_x\right)}_{\text{riserva retrospettiva}} = W_t$$

Osservazione 1

Coincidenza tra riserva prospettiva e retrospettiva basata sull'uso della stessa base tecnica nel calcolo delle due riserve

Possibile uso di base tecnica diversa nel calcolo della riserva prospettiva, in seguito a variazione di scenario $\Rightarrow$ non coincidenza delle riserve

Osservazione 2

Non coincidenza delle riserve in assicurazioni in cui i futuri benefici dipendono dalla composizione in t del *gruppo assicurato*, cioè da quali assicurati sono in vita in t

- riserva prospettiva: dipendente dalla composizione (reale o ipotetica) del gruppo in t
- riserva retrospettiva: richiede valutazione in 0, quindi basata sulla composizione iniziale del gruppo

PROCESSO DI ACCUMULAZIONE ATTUARIALE

Riferimento: assicurazione temporanea caso morte, $C = 1$, durata m anni, premio annuo costante P pagabile per tutta la durata contrattuale

Premi naturali:

$$P_h^{[\mathrm{N}]} = {}_1A'_{x+h} = (1+i')^{-1}\, q'_{x+h}; \quad h = 0, 1, \ldots, m-1$$

Premi *di riserva* (o premi *di risparmio attuariale*):

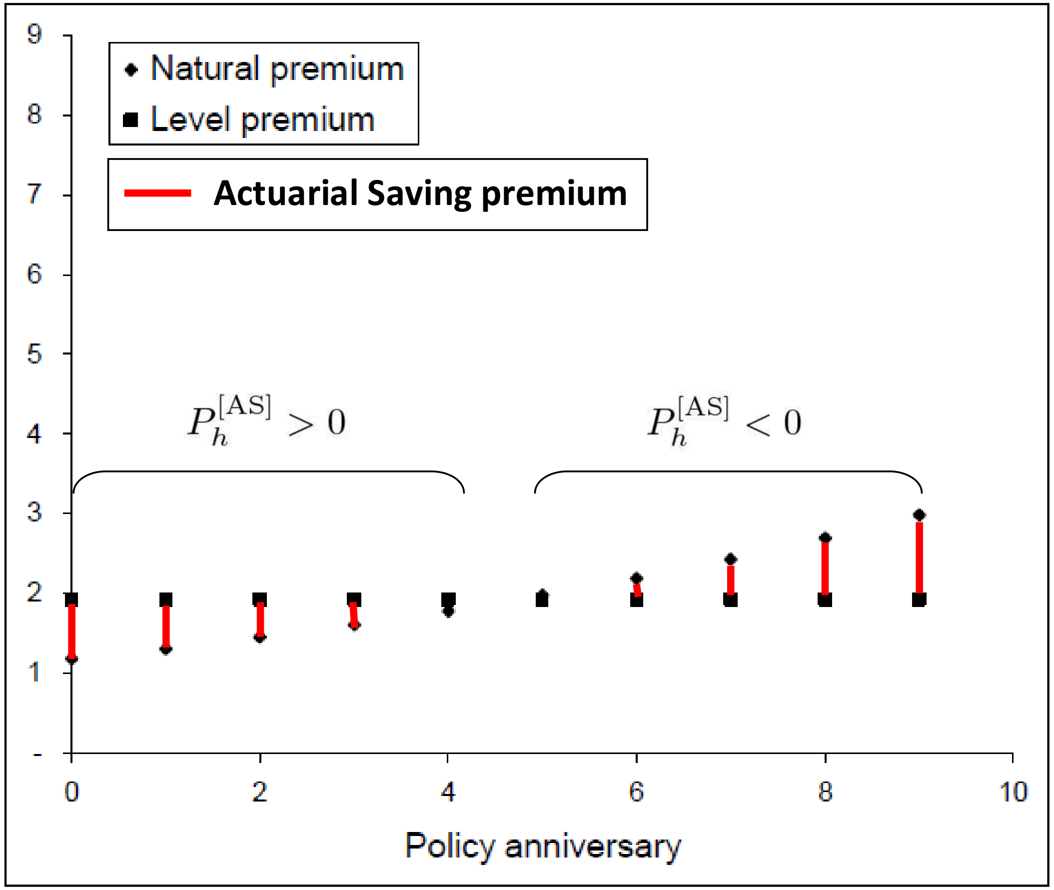
$$P_h^{[\mathrm{AS}]} = P - P_h^{[\mathrm{N}]}; \quad h = 0, 1, \ldots, m-1 \qquad (P_h^{[\mathrm{AS}]} \gtreqless 0)$$

Vedi Figura seguente

Valore attuariale in $t = 0$ dei premi di riserva relativi ai primi t anni di contratto:

$$\sum_{h=0}^{t-1} P_h^{[\mathrm{AS}]}\; {}_hE'_x = P \sum_{h=0}^{t-1} {}_hE'_x - \sum_{h=0}^{t-1} {}_1A'_{x+h}\; {}_hE'_x$$

La riserva matematica di un contratto *(cont.)*



Assicurazione temporanea caso morte:
premi naturali, premi costanti, premi di risparmio attuariale

La riserva matematica di un contratto *(cont.)*

Dalle relazioni

$$\sum_{h=0}^{t-1} {}_hE'_x = \ddot{a}'_{x:t\rceil}; \quad \sum_{h=0}^{t-1} {}_1A'_{x+h}\; {}_hE'_x = {}_tA'_x$$

si trova:

$$\sum_{h=0}^{t-1} P_h^{[\mathrm{AS}]}\; {}_hE'_x = P\,\ddot{a}'_{x:t\rceil} - {}_tA'_x = {}_tE'_x\; W_t$$

Infine:

$$W_t = \frac{1}{{}_tE'_x} \sum_{h=0}^{t-1} P_h^{[\mathrm{AS}]}\; {}_hE'_x = \sum_{h=0}^{t-1} P_h^{[\mathrm{AS}]} \frac{1}{{}_{t-h}E'_{x+h}}$$

$\Rightarrow$ Riserva retrospettiva = montante attuariale dei premi di riserva

$\Rightarrow$ Interpretazione della riserva come accumulo di assets eccedenti i costi attesi dei benefici

5.4 RISCHIO E RISPARMIO

INTRODUZIONE

Denominazione “storica” dell’argomento: *equazioni ricorrenti* per la riserva matematica

- utili per agevolare il calcolo (manuale o meccanico) della riserva
- tuttora impiegabili per il calcolo elettronico (con elevata precisione)

Interesse attuale:

- interpretazione (e quantificazione) del duplice ruolo dell’assicuratore vita
  - ▷ intermediazione *finanziaria*
  - ▷ intermediazione *tecnica* nella gestione della mutualità
- conseguente analisi di due componenti di utile atteso
- limitazioni interpretative: nella usuale trattazione (semplificata) non si considerano spese / caricamenti per spese e alterazioni contrattuali (in particolare storni e riscatti)

Si consideri un prodotto assicurativo con:

- durata m
- età all'ingresso x
- capitale assicurato in caso morte C
- capitale assicurato in caso vita a scadenza S
- premi annui costanti P pagabili per l'intera durata contrattuale:

$$P = \frac{C \; {}_mA'_x + S \; {}_mE'_x}{\ddot{a}'_{x:\overline{m}|}}$$

Per esempio:

- $S = 0$, $C > 0 \;\Rightarrow\;$ temporanea caso morte, capitale costante
- $S > 0$, $C = 0 \;\Rightarrow\;$ capitale differito
- $S = C > 0 \;\Rightarrow\;$ mista ordinaria
- $S > C > 0 \;\Rightarrow\;$ mista combinata

Possibili generalizzazioni:

- $S = 0$, $C > 0$, $m = \omega - x \;\Rightarrow\;$ assicurazione a vita intera caso morte
- $S = 0$ e $C_1, C_2, \ldots, C_m$ (anziché C) $\;\Rightarrow\;$ temporanea caso morte con capitale variabile (in particolare temporanea decrescente)
- $P_0, P_1, \ldots, P_{m-1}$ (anziché P) $\;\Rightarrow\;$ premi variabili; in particolare:
  - ▷ premi costanti con periodo di pagamento abbreviato
  - ▷ premio unico
  - ▷ premi naturali

EQUAZIONI RICORRENTI DELLA RISERVA

Riserva matematica prospettiva al tempo t (con base tecnica $\mathrm{TB1}$):

$$V_t = \mathrm{Ben}'(t,m) - \mathrm{Prem}'(t,m) = C\;{}_{m-t}A'_{x+t} + S\;{}_{m-t}E'_{x+t} - P\,\ddot{a}'_{x+t:m-t\rceil}$$

“Staccando” beneficio e premio dell’anno $t+1$:

$$V_t = C\;{}_{1}A'_{x+t} - P + C\;{}_{1|m-t-1}A'_{x+t} + S\;{}_{m-t}E'_{x+t} - P\;{}_{1|}\ddot{a}'_{x+t:m-t-1\rceil}$$

dopo qualche passaggio:

$$V_t + P = C\;{}_{1}A'_{x+t} + V_{t+1}\;{}_{1}E'_{x+t}$$

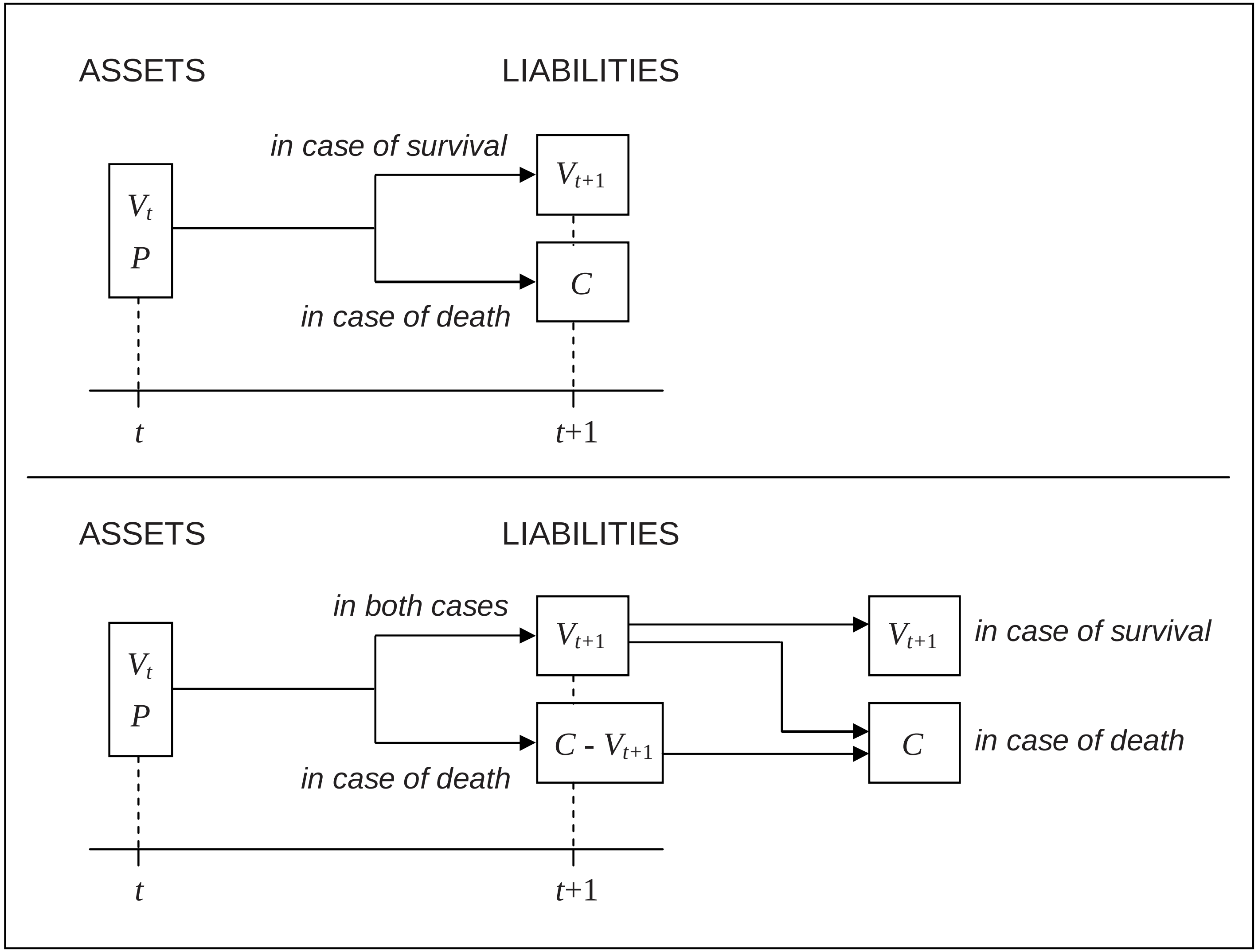
in termini più espliciti (*equazione di Fouret*, 1891):

$$V_t + P = C\,(1+i')^{-1}\,q'_{x+t} + V_{t+1}\,(1+i')^{-1}\,p'_{x+t} \qquad (1)$$

Nota:

- Valori attuariali in (1) riferiti al tempo t (in particolare, assicurato supposto in vita in t)
- Eq. (1) $\Rightarrow$ situazione di “equilibrio” nell’intervallo $(t, t+1)$: attivi disponibili in t (riserva V_t e premio P) coprono esattamente gli impegni in $t+1$ in termini di valori attuariali:
  - ▷ capitale C in caso morte
  - ▷ riserva V_{t+1}, necessaria o per continuare il contratto in caso vita (se $t+1 < m$), o per essere pagata come capitale S a scadenza (se $t+1 = m$)

  (vedi Figura, riquadro superiore)
- Calcolo della riserva possibile mediante applicazione iterativa della (1)
  - ▷ $V_0 = 0 \;\Rightarrow\; V_1, V_2, \ldots, V_m$ (controllo: $V_m = S$)
  - ▷ $V_m = S \;\Rightarrow\; V_{m-1}, V_{m-2}, \ldots, V_0$ (controllo: $V_0 = 0$)



Equazioni ricorrenti: interpretazioni

Espressioni alternative della (1):

$$(V_t + P)\,(1+i') = C\,q'_{x+t} + V_{t+1}\,p'_{x+t} \tag{2}$$

$$V_t + P = (C - V_{t+1})\,(1+i')^{-1}\,q'_{x+t} + V_{t+1}\,(1+i')^{-1} \tag{3}$$

$$(V_t + P)\,(1+i') = (C - V_{t+1})\,q'_{x+t} + V_{t+1} \tag{4}$$

Nota:

- Eq. (2) e Eq. (4) (*equazione di Kanner*, 1869): riferimento finanziario al tempo $t+1$ (riferimento probabilistico al tempo t)
- Eq. (3) e (4) (vedi Figura, riquadro inferiore):
  - riserva V_{t+1} = impegno certo in $t+1$ (sia in caso di decesso che in caso vita)
  - beneficio caso morte (se presente) suddiviso in due parti

$$C = (C - V_{t+1}) + V_{t+1}$$

- importo $C - V_{t+1}$ chiamato *capitale sotto rischio* (o *somma sotto rischio*): non disponibile ma finanziato (anno per anno) tramite la mutualità
- importo V_{t+1}, non "a rischio", in quanto da impiegare comunque (prima o poi)
- in caso di nessun beneficio caso morte ($C = 0$), o beneficio caso morte minore della riserva ($C < V_t$): capitale sotto rischio negativo $\Rightarrow$ se l'assicurato muore nell'anno, capitale sotto rischio (intera riserva se $C = 0$) "liberato", e contribuisce a finanziare i benefici relativi ai contratti ancora in vita

Osservazione

Termine "rischio" usato, in questo contesto, con il significato attuariale tradizionale, cioè "rischio di decesso"

Altre cause di rischio (es. rischio d'investimento, di liquidità, ecc.) non considerate

PREMIO DI RISCHIO E PREMIO DI RISPARMIO

Dall'Eq. (3):

$$P = \left[(C - V_{t+1})\,(1+i')^{-1}\,q'_{x+t}\right] + \left[V_{t+1}\,(1+i')^{-1} - V_t\right]$$

Due componenti del premio annuo:

- *premio di rischio* $\quad P_t^{[\mathrm{R}]} = (C - V_{t+1})\,(1+i')^{-1}\,q'_{x+t}$
- *premio di risparmio* $\quad P_t^{[\mathrm{S}]} = V_{t+1}\,(1+i')^{-1} - V_t$

Premi di risparmio $\Rightarrow$ formazione della riserva:

$$V_{t+1} = (V_t + P_t^{[\mathrm{S}]})\,(1+i')$$

e quindi:

$$V_{t+1} = P_0^{[\mathrm{S}]}\,(1+i')^{t+1} + P_1^{[\mathrm{S}]}\,(1+i')^{t} + \cdots + P_t^{[\mathrm{S}]}\,(1+i')$$

Riserva = accumulazione puramente finanziaria dei premi di risparmio

Premio di rischio =
premio di un’assicurazione monoannuale caso morte con capitale uguale al capitale sotto rischio =
premio naturale per il capitale sotto rischio

Osservazione

Componenti di premio non necessariamente positive. In particolare, se capitale sotto rischio negativo $\Rightarrow$ premio di rischio negativo (vedi esempi numerici)

Esempio 1

Assicurazione temporanea caso morte, con premi annui costanti per tutta la durata contrattuale

Vedi Tabella

Nota: premi di rischio molto prossimi ai premi naturali, in quanto la riserva è molto piccola, e quindi il capitale sotto rischio praticamente coincide con il capitale assicurato

t	P_t	$P_t^{[\mathrm{N}]}$	$P_t^{[\mathrm{R}]}$	$P_t^{[\mathrm{S}]}$	V_t	$C - V_t$
0	5.40	3.31	3.31	2.09	0.00	—
1	5.40	3.68	3.66	1.74	2.14	997.86
2	5.40	4.08	4.05	1.35	3.95	996.05
3	5.40	4.52	4.49	0.91	5.40	994.60
4	5.40	5.01	4.98	0.42	6.44	993.56
5	5.40	5.56	5.52	−0.12	7.00	993.00
6	5.40	6.17	6.13	−0.73	7.01	992.99
7	5.40	6.84	6.80	−1.40	6.41	993.59
8	5.40	7.58	7.56	−2.16	5.11	994.89
9	5.40	8.41	8.41	−3.01	3.01	996.99
10	—	—	—	—	0	1 000.00

Assicurazione temporanea caso morte (premi annui costanti)

$C = 1\,000$, $S = 0$, $x = 50$, $m = 10$, $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$

Esempio 2

Assicurazione temporanea caso morte a premio unico P_0, con $P_0 = \Pi = C\,{}_mA'_x$

Vedi Tabella

Premi naturali coincidenti con quelli nell'Esempio 1: i premi naturali dipendono solo dal complesso di benefici, mentre sono indipendenti dallo specifico regime di pagamento dei premi

Tutti i premi di risparmio, tranne il primo, negativi: "uso" della riserva in mutualità

t	P_t	$P_t^{[N]}$	$P_t^{[R]}$	$P_t^{[S]}$	V_t	$C - V_t$
0	48.52	3.31	3.16	45.35	0.00	—
1	0.00	3.68	3.52	−3.52	46.26	953.74
2	0.00	4.08	3.91	−3.91	43.60	956.40
3	0.00	4.52	4.35	−4.35	40.48	959.52
4	0.00	5.01	4.85	−4.85	36.85	963.15
5	0.00	5.56	5.41	−5.41	32.64	967.36
6	0.00	6.17	6.03	−6.03	27.78	972.22
7	0.00	6.84	6.73	−6.73	22.19	977.81
8	0.00	7.58	7.52	−7.52	15.76	984.24
9	0.00	8.41	8.41	−8.41	8.41	991.59
10	—	—	—	—	0.00	1 000.00

Assicurazione temporanea caso morte (premio unico)

$C = 1\,000,\ S = 0,\ x = 50,\ m = 10,\ \mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$

Esempio 3

Assicurazione di capitale differito, con premi annui costanti per tutta la durata contrattuale

Vedi Tabella

Tutti i premi di rischio negativi, quindi $P_t^{[\mathrm{S}]} > P$ per ogni t

- premio P insufficiente per finanziare la formazione di riserva
- necessari contributi dalle riserve dei contratti che terminano per decesso degli assicurati
- formalmente la Eq. (4) diventa:

$$(V_t + P)\,(1 + i') + V_{t+1}\, q'_{x+t} = V_{t+1}$$

Rischio e risparmio *(cont.)*

t	P_t	$P_t^{[\mathrm{N}]}$	$P_t^{[\mathrm{R}]}$	$P_t^{[\mathrm{S}]}$	V_t	$C - V_t$
0	86.30	0.00	−0.29	86.60	0.00	—
1	86.30	0.00	−0.66	86.96	88.33	−88.33
2	86.30	0.00	−1.11	87.41	178.80	−178.80
3	86.30	0.00	−1.66	87.96	271.53	−271.53
4	86.30	0.00	−2.33	88.63	366.68	−366.68
5	86.30	0.00	−3.14	89.45	464.42	−464.42
6	86.30	0.00	−4.12	90.43	564.95	−564.95
7	86.30	0.00	−5.30	91.61	668.48	−668.48
8	86.30	0.00	−6.72	93.02	775.29	−775.29
9	86.30	971.98	−8.41	94.71	885.68	−885.68
10	—	—	—	—	1 000.00	−1 000.00

Assicurazione di capitale differito (premi annui costanti)

$S = 1\,000$, $C = 0$, $x = 50$, $m = 10$, $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$

Esempio 4

Assicurazione mista ordinaria con premi annui costanti pagabili per tutta la durata contrattuale

Vedi Tabella

Ciascun elemento in tabella = somma dei corrispondenti elementi delle assicurazioni temporanea caso morte e capitale differito

Tutti i premi di rischio e di risparmio positivi (intepretazione: vedi sotto)

Rischio e risparmio *(cont.)*

t	P_t	$P_t^{[N]}$	$P_t^{[R]}$	$P_t^{[S]}$	V_t	$C - V_t$
0	91.71	3.31	3.01	88.69	0.00	—
1	91.71	3.68	3.00	88.70	90.46	909.54
2	91.71	4.08	2.95	88.76	182.75	817.25
3	91.71	4.52	2.83	88.87	276.94	723.06
4	91.71	5.01	2.65	89.05	373.12	626.88
5	91.71	5.56	2.38	89.32	471.42	528.58
6	91.71	6.17	2.00	89.70	571.96	428.04
7	91.71	6.84	1.50	90.20	674.90	325.10
8	91.71	7.58	0.84	90.86	780.40	219.60
9	91.71	980.39	0.00	91.71	888.69	111.31
10	—	—	—	—	1 000.00	0.00

Assicurazione mista ordinaria (premi annui costanti)

$C = S = 1\,000$, $x = 50$, $m = 10$, $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$

Esempio 4 (cont.)

Tutti i premi di rischio e di risparmio positivi

Interpretazione: assicurazione mista ordinaria come combinazione di

- operazione finanziaria di durata m anni
- sequenza di assicurazioni monoannuali caso morte

Vedi Tabella seguente

Anziché acquistare una mista ordinaria di m anni con capitale assicurato C, pagando premi annui costanti P, una persona potrebbe in ciascun anno:

- investire l'importo $P_t^{[\mathrm{S}]}$ in un fondo, annualmente accreditato con interessi al tasso i'
- pagare l'importo $P_t^{[\mathrm{R}]}$ ad un assicuratore per acquistare un'assicurazione monoannuale caso morte con capitale che sommato al saldo del fondo dia C

Anno $(t, t+1)$	Oper. finanziaria durata m anni		Sequenza di m assicurazioni monoannuali	
	Pagamento (al tempo t)	Risultato (al tempo $t+1$)	Pagamento (al tempo t)	Risultato (al tempo $t+1$)
$(0,1)$	$P_0^{[\mathrm{S}]}$	V_1	$P_0^{[\mathrm{R}]}$	$C - V_1$
$(1,2)$	$P_1^{[\mathrm{S}]}$	V_2	$P_1^{[\mathrm{R}]}$	$C - V_2$
$(2,3)$	$P_2^{[\mathrm{S}]}$	V_3	$P_2^{[\mathrm{R}]}$	$C - V_3$
...	...	...	...	...
$(m-2, m-1)$	$P_{m-2}^{[\mathrm{S}]}$	V_{m-1}	$P_{m-2}^{[\mathrm{R}]}$	$C - V_{m-1}$
$(m-1, m)$	$P_{m-1}^{[\mathrm{S}]} = P$	$V_m = C$	$P_{m-1}^{[\mathrm{R}]} = 0$	$C - V_m = 0$

L'assicurazione mista ordinaria come combinazione di operazioni

$\Rightarrow$ Importi pagati e benefici ottenuti coincidono con quelli relativi alla mista ordinaria

Si ha infatti, per i benefici:

$$\underbrace{\sum_{h=1}^{m} V_h \,(1+i')^{-h} \;{}_{h-1|1}q'_x + \sum_{h=1}^{m} (C - V_h)\,(1+i')^{-h} \;{}_{h-1|1}q'_x}_{\text{in caso morte}} + \underbrace{V_m\,(1+i')^{-m} \;{}_{m}p'_x}_{\text{in caso vita a scad.}}$$

$$= \sum_{h=1}^{m} C\,(1+i')^{-h} \;{}_{h-1|1}q'_x + C\,(1+i')^{-m} \;{}_{m}p'_x$$

$$= C\big({}_{m}A'_x + {}_{m}E'_x\big)$$

Osservazione

"Equivalenza" tra mista ordinaria ed insieme di operazioni basata su importanti ipotesi, poco realistiche

In particolare:

- operazione finanziaria a tasso garantito i'
- nelle varie assicurazioni monoannuali, tavola di mortalità invariata

Interpretazione utile per capire il duplice ruolo di un assicuratore vita

▷ intermediazione finanziaria

▷ intermediazione tecnica nella mutualità

non per suggerire analogie contrattuali tra le diverse operazioni

PRODOTTI ASSICURATIVI
E ACCUMULAZIONE FINANZIARIA

Si consideri l'assicurazione a vita intera, a premi unici ricorrenti

Si assuma $i' = 0 \;\Rightarrow\;$ nessun rischio di mortalità sopportato dall'assicuratore

Prova formale:

riserva al tempo t:

$$V_t = \sum_{h=0}^{t-1} \mathit{\Pi}_h$$

importo pagato al beneficiario in caso di decesso nell'anno t

$$C_t = \sum_{h=0}^{t-1} \mathit{\Pi}_h$$

$\Rightarrow\; C_t = V_t \;\Rightarrow\;$ capitale sotto rischio nullo

In generale, se beneficio caso morte coincidente con riserva matematica $\Rightarrow$ prodotto di accumulazione finanziaria

Formalmente, da

$$C_t = V_t$$

segue:

$$P_t^{[\mathrm{R}]} = 0$$

e

$$P_t^{[\mathrm{S}]} = P$$

$\Rightarrow$ Riserva coincidente con il montante (finanziario) dei premi P (o P_t, o Π_t)

Prodotto di accumulazione finanziaria trasformabile in prodotto assicurativo ridefinendo il beneficio caso morte C_t, in modo che sia:

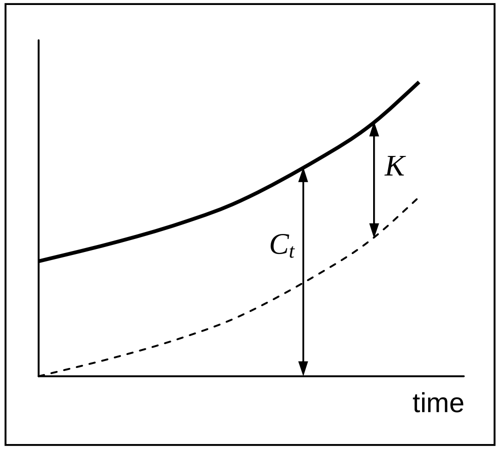
$$C_t > V_t$$

Esempi

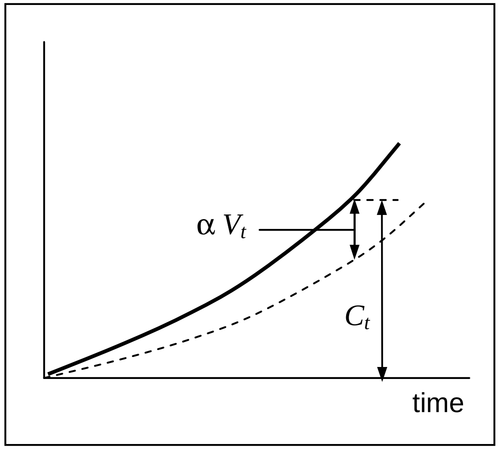
1. Scegliere l'importo K, e porre:
$$C_t = V_t + K$$
2. Scegliere α, e porre:
$$C_t = (1 + \alpha)\, V_t$$
3. Scegliere gli importi K e C, e porre:
$$C_t = \min\{V_t + K, C\}$$
$\Rightarrow$ evita sovrassicurazione
4. Scegliere gli importi K e C, e porre:
$$C_t = \max\{V_t + K, C\}$$
$\Rightarrow$ evita sottoassicurazione

Vedi Figure seguenti

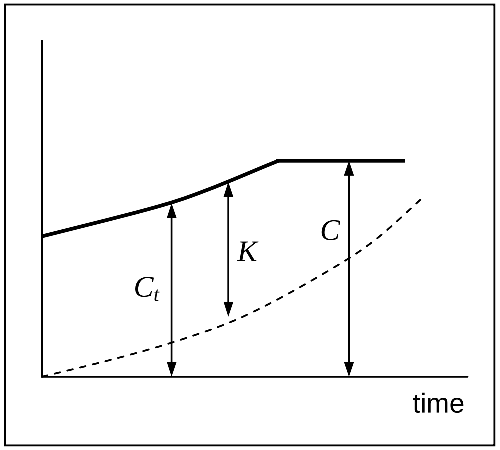
Rischio e risparmio *(cont.)*



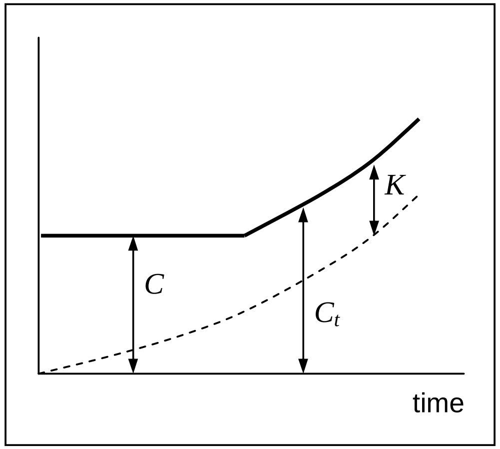
1. *Capitale sotto rischio costante*



2. *Capitale sotto rischio proporzionale*



3. *Capitale sotto rischio con lim. sup.*



4. *Capitale sotto rischio con lim. inf.*

5.5 UTILI ATTESI

INTRODUZIONE

Approccio alla valutazione dell'utile descritto nel cap. 4: confronto tra valori attuariali dei benefici:

A'' = valore attuariale calcolato con la base realistica $\mathrm{TB2}$

A' = valore attuariale adottato come premio unico, quindi calcolato con la base prudenziale $\mathrm{TB1}$

$$\text{utile atteso (valutato all'origine)} \;=\; A' - A''$$

Approccio basato su:

- premio unico
- assenza di spese e relativi caricamenti
- assenza di abbandoni contrattuali

Ulteriori passi necessari per un'analisi degli utili più approfondita. In particolare:

1. sistemi di premio diversi dal premio unico
2. durata dei contratti assicurativi vita superiore ad un anno
   - $\Rightarrow$ attribuzione di una quota dell'utile atteso (totale) a ciascun anno
   - $\Rightarrow$ definizione di utili anno ("timing") dell'utile nel corso della durata contrattuale
3. considerazione di ulteriori elementi, che possono costituire fonti di utile / perdita; tipicamente
   - $\triangleright$ spese e caricamenti per spese
   - $\triangleright$ storni, riscatti, trasformazioni di contratto

Utili attesi *(cont.)*

Riserva matematica $\Rightarrow$ strumento per una “naturale” definizione degli utili annui attesi $\Rightarrow$ aspetti 1 e 2 trattati in questo cap.

Aspetto 3 richiede un più ampio sistema di riferimento $\Rightarrow$ analisi di portafoglio vita (vedi TAP)

UTILI ANNUI ATTESI

Equazione ricorrente (2):

$$(V_t + P)\,(1 + i') - C\,q'_{x+t} - V_{t+1}\,p'_{x+t} = 0 \qquad (a)$$

$$\begin{array}{c}\uparrow \quad \uparrow \qquad \uparrow \qquad \uparrow \qquad \uparrow \quad \uparrow \\ \hline \mathrm{TB1}\end{array}$$

- ▷ equilibrio, nell’anno di contratto $(t, t+1)$, tra “risorse” (riserva all’inizio dell’anno e premio) ed impegni attesi (capitale in caso morte e riserva in caso vita alla fine dell’anno)
- ▷ equilibrio basato sull’impiego della stessa base tecnica, $\mathrm{TB1}$, in tutti gli elementi dell’Eq. (a)

Si assuma invece

- stima realistica del rendimento dall'investimento di $V_t + P$: tasso d'interesse i''
- mortalità nel portafoglio descritta in termini realistici dalle probabilità q''_{x+t}.

$\Rightarrow$ base realistica $\mathrm{TB2}$ introdotta nell'Eq. (a)

Si ottiene

TB2

$$(V_t + P)\,(1 + i'') - C\,q''_{x+t} - V_{t+1}\,p''_{x+t} = \overline{PL}_{t+1} \qquad (b)$$

TB1

dove $\overline{PL}_{t+1}$ ($\gtrless 0$) indica l'*utile / perdita annua attesa* originata dalla "distanza" tra $\mathrm{TB1}$ e $\mathrm{TB2}$ ($\overline{PL}_{t+1}$ rif. a $t+1$ per un contratto in forza al tempo t)

Osservazione

Eq. (b) interpretabile con riferimento a un portafoglio. Siano

- N_t = numero (dato) di contratti in forza al tempo t
- N_{t+1} = numero aleatorio di contratti in forza al tempo $t+1$ (= numero di assicurati in vita)

Allora

$$N_t\, V_t + N_t\, P + (N_t\, V_t + N_t\, P)\, i'' - C\, N_t\, q''_{x+t} - V_{t+1}\, N_t\, p''_{x+t} = N_t\, \overline{PL}_{t+1} \qquad (b')$$

dove

▷ $N_t\, p''_{x+t} = \mathbb{E}[N_{t+1}]$ = numero atteso di assicurati in vita in $t+1$

▷ $N_t\, q''_{x+t} = \mathbb{E}[D_t]$ = numero atteso di assicurati deceduti tra t e $t+1$

secondo la $\mathrm{TB2}$

Quantità nell'Eq. (b'): elementi del *Conto economico (tecnico)*

Utili attesi *(cont.)*

Conto Economico	
Ricavi	
Premi	$P\,N_t$
Reddito da investimenti	$(V_t\,N_t + P\,N_t)\,i''$
Costi	
Benefici pagati	$C\,\mathbb{E}[D_t]$
Variazione della riserva	$V_{t+1}\,\mathbb{E}[N_{t+1}] - V_t\,N_t$
Utile	$\overline{PL}_{t+1}\,N_t$

Valori attuariali come voci di un Conto Economico

SCOMPOSIZIONE DELL'UTILE ANNUO ATTESO

Riferimento all'equazione ricorrente (4):

$$(V_t + P)\,(1 + i') - (C - V_{t+1})\,q'_{x+t} - V_{t+1} = 0 \qquad (^*)$$

Adottando la base tecnica realistica $\mathrm{TB2}$:

$$(V_t + P)\,(1 + i'') - (C - V_{t+1})\,q''_{x+t} - V_{t+1} = \overline{PL}_{t+1} \qquad (^{**})$$

Sottraendo la $(^*)$ dalla $(^{**})$, si ottiene la *formula di contribuzione* (S. Homans, 1863):

$$(V_t + P)\,(i'' - i') + (C - V_{t+1})\,(q'_{x+t} - q''_{x+t}) = \overline{PL}_{t+1}$$

Utile annuo atteso scomposto in due addendi:

$$\overline{PL}_{t+1}^{[\mathrm{fin}]} = (V_t + P)\,(i'' - i')$$

$$\overline{PL}_{t+1}^{[\mathrm{m/l}]} = (C - V_{t+1})\,(q'_{x+t} - q''_{x+t})$$

con il significato:

- $\overline{PL}_{t+1}^{[\mathrm{fin}]}$ = *margine finanziario*, originato dallo spread tra tassi di interesse, $i'' - i'$. Essendo $V_t + P > 0 \Rightarrow$ margine finanziario positivo se e solo se $i'' > i'$
- $\overline{PL}_{t+1}^{[\mathrm{m/l}]}$ = *margine di mortalità / longevità*, originato dallo spread tra probabilità di decesso. Notare che:
  - ▷ se $C - V_{t+1} > 0 \Rightarrow$ margine positivo se e solo se $q'_{x+t} > q''_{x+t}$
  - ▷ se $C - V_{t+1} < 0 \Rightarrow$ margine positivo se e solo se $q'_{x+t} < q''_{x+t}$

Segno del capitale sotto rischio $C - V_{t+1} \;\Rightarrow\;$ scelta della tavola di mortalità da impiegare nella $\mathrm{TB1}$, per ottenere caricamenti di sicurezza impliciti, e quindi utili attesi positivi

- ▷ Prodotti con capitale sotto rischio positivo (per es. assicurazioni temporanea caso morte, vita intera caso morte, mista) $\Rightarrow$ scelta di una tavola con mortalità maggiore di quella attesa nel portafoglio
- ▷ Prodotti con capitale sotto rischio negativo (capitale differito e rendite vitalizie) $\Rightarrow$ scelta di una tavola con mortalità minore di quella attesa nel portafoglio

Esempio

Tabelle seguenti:

- assicurazione temporanea caso morte con $C = 1\,000$, $x = 40$, $m = 10$; premi annui costanti, P, pagabili per tutta la durata contrattuale. $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$; quindi $P = 1.93$. Utili attesi calcolati con $\mathrm{TB2} = (0.03, \mathrm{LT2})$
- assicurazione mista con $C = 1\,000$, $x = 50$, $m = 15$; premi annui costanti,P, pagabili per tutta la durata contrattuale. $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$; quindi $P = 59.54$. Utili attesi calcolati con $\mathrm{TB2} = (0.03, \mathrm{LT2})$

Osservazioni

- ▷ nella temporanea: scarso contenuto finanziario $\Rightarrow$ margini finanziari modesti, contributo maggiore dalle ipotesi di mortalità
- ▷ nella mista: importante contenuto finanziario $\Rightarrow$ spread tra tassi di interesse origina significativi contributi agli utili attesi

t	V_t	$\overline{PL}_t$	$\overline{PL}_t^{[\mathrm{fin}]}$	$\overline{PL}_t^{[\mathrm{m/l}]}$
0	0.00	–	–	–
1	0.76	0.14	0.02	0.12
2	1.40	0.16	0.03	0.13
3	1.92	0.18	0.03	0.15
4	2.29	0.20	0.04	0.16
5	2.48	0.22	0.04	0.18
6	2.49	0.24	0.04	0.20
7	2.27	0.27	0.04	0.22
8	1.81	0.29	0.04	0.25
9	1.06	0.31	0.04	0.27
10	0.00	0.33	0.03	0.30

Assicurazione temporanea caso morte (premi annui costanti): utili attesi

$C = 1\,000$, $x = 40$, $m = 10$; $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1}), \mathrm{TB2} = (0.03, \mathrm{LT2})$

Utili attesi *(cont.)*

t	V_t	$\overline{PL}_t$	$\overline{PL}_t^{[\text{fin}]}$	$\overline{PL}_t^{[\text{m/l}]}$
0	0.00	–	–	–
1	57.54	0.91	0.60	0.32
2	116.11	1.50	1.17	0.33
3	175.74	2.10	1.76	0.34
4	236.46	2.70	2.35	0.35
5	298.33	3.32	2.96	0.36
6	361.40	3.94	3.58	0.36
7	425.75	4.57	4.21	0.36
8	491.45	5.20	4.85	0.35
9	558.59	5.85	5.51	0.34
10	627.30	6.50	6.18	0.32
11	697.70	7.15	6.87	0.28
12	769.96	7.81	7.57	0.24
13	844.26	8.47	8.29	0.18
14	920.85	9.14	9.04	0.10
15	1 000.00	9.80	9.80	0.00

Assicurazione mista ordinaria (premi annui costanti): utili attesi

$C = 1\,000$, $x = 50$, $m = 15$; $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1}), \mathrm{TB2} = (0.03, \mathrm{LT2})$

L'UTILE TOTALE ATTESO

Sequenza di utili annui attesi $\overline{PL}_1, \overline{PL}_2, \ldots, \overline{PL}_m$, interpretabile come rendita vitalizia temporanea

Valore attuariale di tale rendita, $\overline{PL}$, secondo la base realistica $\mathrm{TB2}$:

$$\overline{PL} = \sum_{t=0}^{m-1} \overline{PL}_{t+1} \, (1+i'')^{-(t+1)} \, {}_t p''_x$$

cioè valore atteso dell'utile totale, espresso come valore attuale al tempo 0. Notare: uso della $\mathrm{TB2}$ per attualizzare gli utili annui attesi

È possibile verificare che, assumendo $V_0 = 0$ e $V_m = S$, si ha:

$$\overline{PL} = \sum_{t=0}^{m-1} P\,(1+i'')^{-t}\,{}_t p''_x - \sum_{t=0}^{m-1} C\,(1+i'')^{-(t+1)}\,{}_{t|1} q''_x - S\,(1+i'')^{-m}\,{}_m p''_x$$

$(^\circ)$

L'Eq. $(^\circ)$ può essere scritta:

$$\overline{PL} = \sum_{t=0}^{m-2} {}_t p''_x \, (1+i'')^{-(t+1)} \left[P\,(1+i'') - C\,q''_{x+t}\right] \; +$$
$$_{m-1}p''_x \, (1+i'')^{-m} \left[P\,(1+i'') - C\,q''_{x+m-1} - S\,p''_{x+m-1}\right]$$

Quantità in parentesi quadre:

$$\overline{CF}_{t+1} = P\,(1+i'') - C\,q''_{x+t}; \quad t = 0, 1, \ldots, m-2$$
$$\overline{CF}_m = P\,(1+i'') - C\,q''_{x+m-1} - S\,p''_{x+m-1}$$

rappresentano i *flussi di cassa annui attesi*, riferiti a un contratto in forza in t o in $m-1$ rispettivamente, ciascun flusso capitalizzato alla fine del relativo anno

$\Rightarrow$ Utile totale atteso = valore attuale della rendita costituita dai flussi di cassa annui attesi

$$\overline{PL} = \sum_{t=0}^{m-1} \overline{CF}_{t+1} \, (1+i'')^{-(t+1)} \, {}_t p''_x$$

Quindi

- $\triangleright$ il profilo temporale della riserva influisce sugli utili annui attesi, quindi sull'emergere temporale dell'utile (o *timing dell'utile*)
- $\triangleright$ non influisce sull'utile totale atteso

Esempio 1

- assicurazione temporanea caso morte: $\overline{PL} = 1.93$
- assicurazione mista ordinaria: $\overline{PL} = 55.90$

(Dati come nell'esempio precedente)

Esempio 2

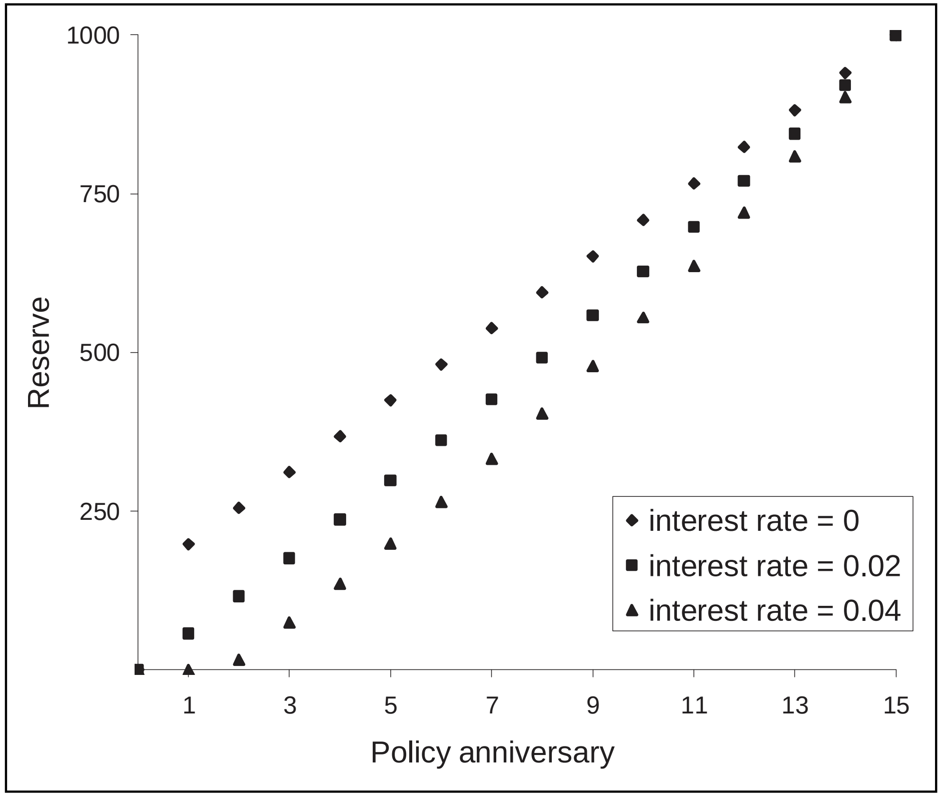
Effetti della riserva sul timing dell'utile

Riferimento: assicurazione mista ordinaria. Dati: $C = 1\,000$, $x = 50$, $m = 15$; $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$, $\mathrm{TB2} = (0.03, \mathrm{LT2})$

Figura: riserve calcolate con i tassi di interesse 0, 0.02 ($= i'$), 0.04 (eventuali valori negativi sostituiti da 0)

Tabella: utili annui attesi corrispondenti ai tre profili temporali di riserva. Notare:

- ▷ valori di riserva elevati (rispetto a quelli ottenuti con i') $\Rightarrow$ notevole perdita attesa nel primo anno, recuperata da utili attesi negli anni successivi
- ▷ valori di riserva bassi $\Rightarrow$ accelerazione dell'emergere degli utili, compensati da perdite attese negli anni seguenti
- ▷ ovviamente: $\overline{PL}^{(0.00)} = \overline{PL}^{(0.02)} = \overline{PL}^{(0.04)} = 55.90$ (vedi Esempio 1)



Assicurazione mista ordinaria (premi annui costanti)

$C = 1\,000$, $x = 50$, $m = 15$; $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$, $\mathrm{TB2} = (0.03, \mathrm{LT2})$

Utili attesi *(cont.)*

t	$V_t^{(0.00)}$	$\overline{PL}_t^{(0.00)}$	$V_t^{(0.02)}$	$\overline{PL}_t^{(0.02)}$	$V_t^{(0.04)}$	$\overline{PL}_t^{(0.04)}$
0	0.00	—	0.00	—	0.00	—
1	198.08	−139.20	57.54	0.91	0.00	58.28
2	254.82	8.01	116.11	1.50	16.10	41.90
3	311.50	9.72	175.74	2.10	74.82	−0.37
4	368.13	11.42	236.46	2.70	135.75	−0.95
5	424.72	13.12	298.33	3.32	199.00	−1.55
6	481.32	14.82	361.40	3.94	264.71	−2.17
7	537.95	16.51	425.75	4.57	333.02	−2.83
8	594.66	18.21	491.45	5.20	404.11	−3.51
9	651.51	19.89	558.59	5.85	478.16	−4.24
10	708.55	21.58	627.30	6.50	555.39	−5.00
11	765.86	23.26	697.70	7.15	636.07	−5.81
12	823.54	24.95	769.96	7.81	720.48	−6.66
13	881.69	26.63	844.26	8.47	808.99	−7.58
14	940.46	28.31	920.85	9.14	902.00	−8.56
15	1 000.00	30.00	1 000.00	9.80	1 000.00	−9.62
	$\overline{PL}^{(0.00)} = 55.90$		$\overline{PL}^{(0.02)} = 55.90$		$\overline{PL}^{(0.04)} = 55.90$	

Assicurazione mista ordinaria (premi annui costanti)

$C = 1\,000$, $x = 50$, $m = 15$; $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$, $\mathrm{TB2} = (0.03, \mathrm{LT2})$

FLUSSI DI CASSA, UTILI, MARGINI DI PREMIO

Confronto tra la definizione dei $\overline{CF}_{t+1}$ e quella dei $\overline{PL}_{t+1}$ $\Rightarrow$ relazione tra flussi di cassa annui attesi ed utili annui attesi:

$$\overline{PL}_{t+1} = \overline{CF}_{t+1} + V_t\,(1 + i'') - V_{t+1}\,p''_{x+t}; \quad t = 0, 1, \ldots, m-2$$

$$\overline{PL}_m = \overline{CF}_m + V_{m-1}\,(1 + i'')$$

Ruolo della riserva: attribuzione di quote di premio ai vari anni di contratto $\Rightarrow$ passaggio da valutazioni “di cassa” (i $\overline{CF}$) a valutazioni “di competenza” (i $\overline{PL}$)

Esempio

- assicurazione temporanea caso morte
- assicurazione mista ordinaria

Vedi tabelle seguenti (Dati come negli esempi precedenti)

t	$\overline{PL}_t$	$\overline{CF}_t$	$(P - P'')\,(1 + i'')$
1	0.14	0.90	0.23
2	0.16	0.78	0.23
3	0.18	0.65	0.23
4	0.20	0.51	0.23
5	0.22	0.35	0.23
6	0.24	0.17	0.23
7	0.27	-0.03	0.23
8	0.29	-0.25	0.23
9	0.31	-0.49	0.23
10	0.33	-0.76	0.23

Assicurazione temporanea caso morte (premi annui costanti)

$C = 1\,000$, $x = 40$, $m = 10$; $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$, $\mathrm{TB2} = (0.03, \mathrm{LT2})$

Utili attesi *(cont.)*

t	$\overline{PL}_t$	$\overline{CF}_t$	$(P - P'')\,(1 + i'')$
1	0.91	58.28	4.84
2	1.50	57.95	4.84
3	2.10	57.58	4.84
4	2.70	57.17	4.84
5	3.32	56.72	4.84
6	3.94	56.22	4.84
7	4.57	55.66	4.84
8	5.20	55.04	4.84
9	5.85	54.36	4.84
10	6.50	53.60	4.84
11	7.15	52.76	4.84
12	7.81	51.82	4.84
13	8.47	50.79	4.84
14	9.14	49.65	4.84
15	9.80	−938.67	4.84

Assicurazione mista ordinaria (premi annui costanti)

$C = 1\,000$, $x = 50$, $m = 15$; $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$, $\mathrm{TB2} = (0.03, \mathrm{LT2})$

Approccio alternativo alla valutazione degli utili annui: *margini di premio*

Riferimento all'Eq. $(^\circ)$ (in cui $\overline{PL}$ = valore attuale atteso dei $\overline{CF}_{t+1}$); siano:

$$\ddot{a}''_{x:m\rceil} = \sum_{t=0}^{m-1} (1+i'')^{-t} \, {}_t p''_x$$

$$_m A''_x = \sum_{t=0}^{m-1} (1+i'')^{-(t+1)} \, {}_{t|1} q''_x$$

$$_m E''_x = (1+i'')^{-m} \, {}_m p''_x$$

Utile totale atteso:

$$\overline{PL} = P \, \ddot{a}''_{x:m\rceil} - C \, {}_m A''_x - S \, {}_m E''_x$$

Sia P'' = “premio di secondo ordine” (premio annuo costante calcolato con la base realistica $\mathrm{TB2}$)

$$P''\,\ddot{a}''_{x:\overline{m}|} = C\,{}_{m}A''_{x} + S\,{}_{m}E''_{x}$$

Utile totale atteso espresso come valore attuariale della rendita le cui rate sono i *margini annui di premio*:

$$\overline{PL} = (P - P'')\,\ddot{a}''_{x:\overline{m}|}$$

Notare

- ▷ risultato intuitivo: utili originati dallo spread tra premi
- ▷ generalizzazione del risultato descritto nel cap. 4 in relazione a premi unici (Utile totale atteso = $A' - A''$)

Si assumano come utili annui attesi le quantità

$$\overline{PL}_t = (P - P'')\,(1 + i''); \quad t = 1, 2, \ldots, m$$

$\Rightarrow$ profilo temporale degli utili piatto $\Rightarrow$ accelerazione nell'emergere dell'utile (vedi Esempio)

Esempio

Vedi ultima colonna nelle Tabelle precedenti

UTILI ATTESI IN BASE ALLA RISERVA REALISTICA

Valore attuariale dei futuri benefici al netto dei futuri premi, secondo la base realistica $\mathrm{TB2}$:

$$V_t^{[\mathrm{real}]} = C\,{}_{m-t}A''_{x+t} + S\,{}_{m-t}E''_{x+t} - P\,\ddot{a}''_{x+t:m-t\rceil}$$

$V_t^{[\mathrm{real}]}$ = *riserva realistica*

In particolare:

$$V_0^{[\mathrm{real}]} = C\,{}_{m}A''_{x} + S\,{}_{m}E''_{x} - P\,\ddot{a}''_{x:m\rceil}$$

e quindi:

$$V_0^{[\mathrm{real}]} = (P'' - P)\,\ddot{a}''_{x:m\rceil} = -\overline{PL}$$

$\Rightarrow\; -V_0^{[\mathrm{real}]} = \overline{PL} =$ “valore” del contratto (all’emissione), come valore attuariale degli utili originati da contratto stesso

Si assumano, per la riserva V_t, i seguenti valori:

$$V_0 = 0; \quad V_t = V_t^{[\mathrm{real}]}, \text{ per } t = 1, 2, \ldots, m-1; \quad V_m = S$$

Si può provare che risulta:

$$\overline{PL}_1 = -V_0^{[\mathrm{real}]}\,(1 + i'')$$
$$\overline{PL}_t = 0; \quad t = 2, 3, \ldots, m$$

$\Rightarrow$ Utile totale atteso emerge completamente nel primo anno di contratto

Osservazione

Due approcci all'emergere temporale dell'utile

1. *Deferral & Matching*
   - caratteristica tradizionale dei modelli attuariali
   - idea base $\Rightarrow$ l'utile totale atteso emerge progressivamente nel tempo
   - procedura di valutazione dell'utile atteso costituita da due passi
     - ▷ valutazione di risultati annuali (tipicamente: flussi di cassa, utili)
     - ▷ calcolo dell'utile totale come valore attuariale dei risultati annuali
2. *Assets & Liabilities*
   - caratteristica dei modelli finanziari
   - procedura di valutazione dell'utile atteso costituita da due passi
     - ▷ utile totale atteso dato dalla differenza tra valore degli attivi (per es. premio unico, o credito per futuri premi periodici) e valore dei passivi (impegni dell'assicuratore)
     - ▷ eventuali utili annui dati solo da variazioni nei valori di attivi e/o passivi

5.6 RISERVE PER SPESE

Generalizzazione della definizione di riserva di un contratto, per includere spese e caricamenti per spese $\Rightarrow$ *riserva completa*:

$$V_t^{[\mathrm{tot}]} = \mathrm{Ben}'(t,m) + \mathrm{Exp}'(t,m) - \mathrm{Prem}'(t,m) - \mathrm{Load}'(t,m)$$

dove

- $\mathrm{Exp}'(t,m)$ = valore attuariale delle future spese
- $\mathrm{Load}'(t,m)$ = valore attuariale dei futuri caricamenti per spese

Riserva per spese e caricamenti:

$$V_t^{[\mathrm{E}]} = \mathrm{Exp}'(t,m) - \mathrm{Load}'(t,m)$$

Risulta ovviamente

$$V_t^{[\mathrm{tot}]} = V_t + V_t^{[\mathrm{E}]}$$

Più conveniente considerare separatamente le varie componenti di spesa e relativi caricamenti

Necessità di riservare causata da disallineamento temporale tra flussi di cassa in entrata ed in uscita $\Rightarrow$ escluse le spese di incasso premi

Riserva per spese di acquisizione

- riserva esclusa in caso di premio unico
- in caso di premi annui per s anni $\Rightarrow$ *riserva per spese di acquisizione* (negativa), $V_t^{[\mathrm{A}]}$, credito dell'assicuratore per caricamenti da incassare negli anni futuri

$$V_t^{[\mathrm{A}]} = \begin{cases} -\Lambda^{[\mathrm{A}]}\, \ddot{a}'_{x+t:s-t\rceil} & \text{per } t \leq s-1 \\ 0 & \text{per } t \geq s \end{cases}$$

Riserva di Zillmer (o *zillmerata*):

$$V_t^{[\mathrm{Z}]} = V_t + V_t^{[\mathrm{A}]}$$

In generale: $V_t^{[\mathrm{Z}]} \leq V_t$; nei primi anni di contratto, possibile $V_t^{[\mathrm{Z}]} < 0$

Osservazione

Riserva di Zillmer implica una “compensazione” tra credito e debito dell’assicuratore; (anche) per questa ragione, in molti paesi divieto di zillmeraggio nella valutazione della riserva di portafoglio a fini di bilancio

Alternativa alla riserva di Zillmer: inserire nel bilancio il credito per spese di acquisizione non ancora ammortizzate (DAC = Deferred Acquisition Costs)

Riserva per spese generali di amministrazione, in caso di premi annui per s anni; se $s < m$:

$$V_t^{[\mathrm{G}]} = \begin{cases} \gamma\, C\, \ddot{a}'_{x+t:m-t\rceil} - \Lambda^{[\mathrm{G}]}\, \ddot{a}'_{x+t:s-t\rceil} & \text{per } t \leq s-1 \\ \gamma\, C\, \ddot{a}'_{x+t:m-t\rceil} & \text{per } t \geq s \end{cases}$$

Se $s = m$, si ha per ogni t:

$$V_t^{[\mathrm{G}]} = \gamma\, C\, \ddot{a}'_{x+t:m-t\rceil} - \Lambda^{[\mathrm{G}]}\, \ddot{a}'_{x+t:m-t\rceil} = 0$$

In caso di premio unico:

$$V_t^{[\mathrm{G}]} = \gamma\, C\, \ddot{a}'_{x+t:m-t\rceil}$$

In alcuni Paesi, è definita la seguente riserva (chiamata in Germania *Inventardeckungscapital*):

$$V_t^{[\mathrm{I}]} = V_t + V_t^{[\mathrm{G}]}$$

Riserva completa, $V_t^{[\mathrm{tot}]}$, include tutte le spese e relativi caricamenti:

$$V_t^{[\mathrm{tot}]} = V_t + V_t^{[\mathrm{A}]} + V_t^{[\mathrm{G}]}$$

Esempio

Riferimento a

- assicurazione a vita intera caso morte, premi annui costanti per $s = 15$ anni
- assicurazione mista ordinaria, durata $m = 15$, premi pagabili per $s = m = 15$ anni

e dati come nell'esempio su spese e caricamenti

Vedi Tabelle seguenti

t	V_t	$V_t^{[A]}$	$V_t^{[G]}$	$V_t^{[Z]}$	$V_t^{[I]}$	$V_t^{[tot]}$
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1	42.57	−18.85	0.76	23.72	43.33	24.48
2	85.79	−17.68	1.55	68.11	87.34	69.66
3	129.69	−16.49	2.35	113.20	132.04	115.55
4	174.28	−15.27	3.17	159.01	177.45	162.18
5	219.57	−14.03	4.02	205.54	223.59	209.56
...	...	...	...	...	...	...
12	559.31	−4.60	10.74	554.71	570.05	565.45
13	611.76	−3.11	11.86	608.64	623.62	620.50
14	665.46	−1.58	13.02	663.88	678.49	676.90
15	720.56	0.00	14.25	720.56	734.81	734.81
16	730.68	0.00	13.74	730.68	744.42	744.42
...	...	...	...	...	...	...
24	807.47	0.00	9.82	807.47	817.29	817.29
25	816.33	0.00	9.37	816.33	825.70	825.70
...	...	...	...	...	...	...

Assicurazione a vita intera (premi costanti)

$C = 1\,000,\ x = 50,\ s = 15,\ \mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$

$\alpha = 0.02,\ \beta = 0.04,\ \gamma = 0.001$

t	V_t	$V_t^{[A]}$	$V_t^{[G]}$	$V_t^{[Z]}$	$V_t^{[I]}$	$V_t^{[tot]}$
0	0.00	0.00	0	0.00	0.00	0.00
1	57.54	−34.52	0	23.02	57.54	23.02
2	116.11	−32.38	0	83.73	116.11	83.73
3	175.74	−30.19	0	145.54	175.74	145.54
4	236.46	−27.97	0	208.49	236.46	208.49
5	298.33	−25.70	0	272.63	298.33	272.63
...	...	...	...	...	...	...
12	769.96	−8.43	0	761.53	769.96	761.53
13	844.26	−5.70	0	838.56	844.26	838.56
14	920.85	−2.90	0	917.95	920.85	917.95
15	1 000.00	0.00	0	1 000.00	1 000.00	1 000.00

Assicurazione mista ordinaria (premi costanti)

$C = 1\,000$, $x = 50$, $s = m = 15$, $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$

$\delta(15) = 0.55$, $\beta = 0.04$, $\gamma = 0.0015$

5.7 VALORI DI RISCATTO E VALORI DI RIDUZIONE

Calcolo di valori di riscatto e valori di riduzione (paid-up) basati sul credito dell'assicurato al momento di alterazione contrattuale

Credito netto dell'assicurato (basato su benefici, spese e premi caricati per spese) dato dalla riserva $V_t^{[\mathrm{tot}]}$, in molti casi coincidente con la riserva di Zillmer $V_t^{[\mathrm{Z}]}$

Consideriamo la riserva di Zillmer

Valore di riscatto

Valore di riscatto, R_t, determinabile come segue:

$$R_t = \varphi(t)\, V_t^{[\mathrm{Z}]}$$

Funzione $\varphi(t)$ ($0 \leq \varphi(t) \leq 1$, solitamente uguale a 0 solo per $t = 1, 2$): penalizzazione per riscatto

Penalizzazione decrescente al crescere di $t \;\Rightarrow\; \varphi(t)$ crescente

Penalizzazione giustificata come segue:

- da un punto di vista legale, l'assicurato interrompe il contratto
- da un punto di vista economico, l'assicuratore può recuperare futuri utili attesi dal contratto

Altre formule adottate spesso nella pratica assicurativa

Regola proporzionale per assicurazioni miste (durata m anni, premi annui per m anni):

$$R_t = \frac{t}{m}\, C\, (1 + i^{[\mathrm{r}]})^{-(m-t)}$$

con $i^{[\mathrm{r}]}$ = tasso di attualizzazione per calcolare il valore di riscatto, $i^{[\mathrm{r}]} > i'$. Formula giustificata dal profilo temporale della riserva matematica dell'assicurazione mista

Valori di riduzione

Riduzione della somma assicurata: conversione di un contratto assicurativo in uno "liberato" dal pagamento premi (paid-up)

Rif. assicurazione di capitale differito, durata m anni, somma assicurata S, premio annuo costante pagabile per l'intera durata del contratto

L'assicurato richieda riduzione al tempo t (dopo il pagamento dei premi in $0, 1, \ldots, t-1$)

Parte della riserva di Zillmer, $V_t^{[\mathrm{Z}]}$, usata (come "premio unico") per finanziare il contratto paid-up, con beneficio a scadenza ridotto, $S^{[\mathrm{red}]}$, e spese generali di amministrazione imputate per la residua durata

Formalmente, $S^{[\mathrm{red}]}$ soluzione di:

$$\bar{\varphi}(t)\, V_t^{[\mathrm{Z}]} = S^{[\mathrm{red}]} \left({}_{m-t}E'_{x+t} + \gamma\, \ddot{a}'_{x+t:\overline{m-t}|} \right)$$

con $\bar{\varphi}(t)$ $(0 < \bar{\varphi}(t) \leq 1)$ penalizzazione

Altre formule (approssimate) spesso adottate nella pratica assicurativa

Regola proporzionale: importo $S^{[\mathrm{red}]}$ in un assicurazione mista (durata m anni, premi annui per m anni) determinato come:

$$S^{[\mathrm{red}]} = \frac{t}{m}\, S$$