C COMPLEMENTI

Ermanno Pitacco

Matematica attuariale delle assicurazioni vita

C.1 VALORI DI COMMUTAZIONE

INTRODUZIONE

"Valori" (o "funzioni") di commutazione $\Rightarrow$ strumento per implementare un metodo di calcolo dei valori attuariali (premi e riserve in particolare)

- ▷ agevola il computo manuale dei valori attuariali
- ▷ applicabile anche per il calcolo elettronico

Metodo ideato nel 1772 da W. Dale, applicato in particolare da J. Tetens nel 1785

Valori di commutazione dipendono dalla base tecnica adottata:

- tasso di interesse i
- tavola di mortalità ℓ_x

$\Rightarrow$ al variare di uno degli elementi (o di entrambi) occorre ricostruire la tavola dei valori di commutazione

DEFINIZIONI

Capitale differito

$$ {}_mE_x = (1+i)^{-m} \, {}_mp_x = (1+i)^{-m} \, \frac{\ell_{x+m}}{\ell_x} $$

Ponendo:

$$ \boxed{D_x = (1+i)^{-x} \, \ell_x} $$

si ottiene:

$$ {}_mE_x = \frac{D_{x+m}}{D_x} $$

$\Rightarrow$ I valori D (e gli altri valori di commutazione) “incorporano" l’attualizzazione finanziaria e quella biometrica

Rendite vitalizie

$$\ddot{a}_x = \sum_{h=0}^{\omega-x} {}_hE_x = \frac{1}{D_x} \sum_{h=0}^{\omega-x} D_{x+h}$$

Ponendo:

$$\boxed{N_x = \sum_{h=0}^{\omega-x} D_{x+h}}$$

si ottiene:

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

e quindi:

$$\ddot{a}_{x:m\rceil} = \frac{N_x - N_{x+m}}{D_x}$$

$${}_{r|}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+r}}{D_x}$$

$$(I\ddot{a})_x = \sum_{h=0}^{\omega-x} {}_{h|}\ddot{a}_x = \frac{1}{D_x}\sum_{h=0}^{\omega-x} N_{x+h}$$

Ponendo:

$$\boxed{S_x = \sum_{h=0}^{\omega-x} N_{x+h}}$$

si ottiene:

$$(I\ddot{a})_x = \frac{S_x}{D_x}$$

Assicurazioni caso morte

$$ {}_1A_x = (1+i)^{-1}\,{}_1q_x = (1+i)^{-1}\,\frac{\ell_x - \ell_{x+1}}{\ell_x} $$

Ponendo:

$$ \boxed{C_x = (1+i)^{-(x+1)}\,(\ell_x - \ell_{x+1})} $$

si ottiene:

$$ {}_1A_x = \frac{C_x}{D_x} $$

$$ {}_{h|1}A_x = \frac{C_{x+h}}{D_x} $$

$$A_x = \sum_{h=0}^{\omega-x} {}_{h|1}A_x = \frac{1}{D_x} \sum_{h=0}^{\omega-x} C_{x+h}$$

Ponendo:

$$\boxed{M_x = \sum_{h=0}^{\omega-x} C_{x+h}}$$

si ottiene:

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

$$_{r|}A_x = \frac{M_{x+r}}{D_x}$$

$$_{m}A_x = \frac{M_x - M_{x+m}}{D_x}$$

$$(IA)_x = \sum_{h=0}^{\omega-x} {}_{h|}A_x = \frac{1}{D_x} \sum_{h=0}^{\omega-x} M_{x+h}$$

Ponendo:

$$\boxed{R_x = \sum_{h=0}^{\omega-x} M_{x+h}}$$

si ottiene:

$$(IA)_x = \frac{R_x}{D_x}$$

Assicurazione mista ordinaria

$$A_{x,m\rceil} = {}_mA_x + {}_mE_x = \frac{M_x - M_{x+m} + D_{x+m}}{D_x}$$

Valori di commutazione *(cont.)*

Tavola 2 segue - **Tavole attuariali per sesso ed età al 2002 - valori di commutazione e premi puri unici ed annui per tassi d'interesse dallo 0,5% al 5% - Italia**

1,0% **Valori di commutazione - Maschi**

ETÀ x	D_x	N_x	S_x	C_x	M_x	R_x
0	100000,00000000	7460794,00692656	299559993,09571800	467,98928367	92546,65933370	7161533,27455839
1	99432,11061643	7360794,00692656	292099199,08879200	29,89739406	92078,67005003	7068986,61522469
2	99302,88044453	7261361,89631014	284738405,08186500	21,86253999	92048,77265597	6976907,94517466
3	99181,81422778	7162059,01586560	277477043,18555500	16,90692457	92026,91011599	6884859,17251869
4	99065,82457172	7062877,20163782	270314984,16969000	14,08388843	92010,00319142	6792832,26240270
5	98952,77382558	6963811,37706610	263252106,96805200	13,14486566	91995,91930299	6700822,25921128
6	98840,77504001	6864858,60324053	256288295,59098600	13,31443677	91982,77443733	6608826,33990829
7	98728,71857023	6766017,82820052	249423436,98774500	13,41850625	91969,46000056	6516843,56547096
8	98616,66997550	6667289,10963029	242657419,15954500	13,36286472	91956,04149431	6424874,10547040
9	98504,78895895	6568672,43965480	235990130,04991500	13,23255293	91942,67862958	6332918,06397610
10	98393,15002344	6470167,65069585	229421457,61026000	12,96081815	91929,44607665	6240975,38534651
11	98281,89435013	6371774,50067241	222951289,95956400	12,68394549	91916,48525851	6149045,93926986
12	98171,02669400	6273492,60632228	216579515,45889200	14,54602790	91903,80131302	6057129,45401135
13	98058,40771236	6175321,57962828	210306022,85256900	19,08745840	91889,25528512	5965225,65269834
14	97941,35980669	6077263,17191593	204130701,27294100	26,70408941	91870,16782672	5873336,39741322
15	97816,81220099	5979321,81210923	198053438,10102500	36,14554773	91843,46373730	5781466,22958650
16	97682,94756015	5881504,99990825	192074116,28891600	47,93218895	91807,31818957	5689622,76584920
17	97537,43000900	5783822,05234810	186192611,28900800	59,04355841	91759,38600062	5597815,44765963
18	97380,94646057	5686284,62233909	180408789,23666000	68,30916096	91700,34244221	5506056,06165901
19	97215,35363681	5588903,67587852	174722504,61432000	75,15457214	91632,03328125	5414355,71921680
20	97043,08082928	5491688,32224171	169133600,93844200	79,88919026	91556,87870912	5322723,68593554
21	96866,24550433	5394645,24141243	163641912,61620000	84,19512728	91476,98951886	5231166,80722643
22	96685,28090102	5297778,99590811	158247267,37478800	86,46200789	91392,79439158	5139689,81770757
23	96502,23020092	5201093,71500709	152949488,37888000	87,56980910	91306,33238369	5048297,02331599
24	96318,25456745	5104591,48480616	147748394,66387300	89,55380357	91218,76257460	4956990,69093230
25	96132,47873134	5008273,23023871	142643803,17906600	88,15538734	91129,20877102	4865771,92835770
...	.....	.....	.....	.....	.....	.....

Tavola di commutazione (Fonte: ISTAT)

INTERPRETAZIONI

Risulta:

$$D_x = (1+i)^{-x}\,\ell_x = (1+i)^{-x}\,{}_xp_0 = {}_xE_0$$

= valore attuariale (premio unico) di un capitale unitario differito x anni su persona di età 0

La ${}_mE_x = \frac{D_{x+m}}{D_x}$ può allora essere scritta:

$${}_mE_x = {}_{x+m}E_0\,\frac{1}{{}_xE_0}$$

$\Rightarrow$ valore attuariale di un capitale unitario differito m anni su persona di età x determinato

1. calcolando il valore all'epoca in cui ha età 0 ($\Rightarrow$ ${}_{x+m}E_0$)
2. "portando" la valutazione all'epoca in cui ha età x ($\Rightarrow$ $\frac{1}{{}_xE_0}$)

Risulta:

$$C_x = (1+i)^{-(x+1)}\,(\ell_x - \ell_{x+1}) = (1+i)^{-(x+1)}\;{}_{x|1}q_0 = {}_{x|1}A_0$$

= valore attuariale (premio unico) di un capitale unitario pagabile in caso di decesso tra età x e $x+1$ anni per assicurato di età 0

La ${}_1A_x = \frac{C_x}{D_x}$ può allora essere scritta:

$${}_1A_x = {}_{x|1}A_0\,\frac{1}{{}_xE_0}$$

$\Rightarrow$ interpretazione analoga al caso del capitale differito

APPLICAZIONI

Esempio: calcolo dei premi di una mista ordinaria di capitale C

- Premio unico:

$$\Pi = C\, A_{x,\overline{m}|} = C\, \frac{M_x - M_{x+m} + D_{x+m}}{D_x}$$

- Premio annuo costante pagabile per m anni:

$$P = \frac{\Pi}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} = C\, \frac{M_x - M_{x+m} + D_{x+m}}{N_x - N_{x+m}}$$

C.2 CONTROASSICURAZIONI

In varie forme assicurative, non verificarsi di prestabiliti eventi
$\Rightarrow$ assenza di pagamenti da parte dell'assicuratore

Esempi

1. temporanea caso morte: nessun pagamento in caso di vita dell'assicurato alla scadenza
2. capitale differito: nessun pagamento in caso di decesso dell'assicurato prima della scadenza

Possibilità di stipulare un'assicurazione (detta *controassicurazione*) che prevede la restituzione del premio di tariffa se non si verifica l'evento previsto dall'assicurazione (principale), ma si verifica l'evento "contrario"

Conseguente incremento del premio

Risultato: qualunque sia la durata di vita dell'assicurato, l'assicuratore paga al beneficiario un importo $\Rightarrow$ assicurazione mista

Diverso interesse pratico della controassicurazione nei due esempi

1. assicurazione temporanea caso morte $\Rightarrow$ copertura di rischio $\Rightarrow$ premio usualmente non elevato (in relazione al capitale assicurato) $\Rightarrow$ scarso interesse della controassicurazione
2. assicurazione di capitale differito $\Rightarrow$ finalità previdenziale di costituzione di un capitale (mediante “risparmio assicurativo”) $\Rightarrow$ premio elevato (in relazione al capitale assicurato) $\Rightarrow$ interesse della controassicurazione, molto spesso presente nei contratti di cap. differito $\Rightarrow$ *cap. differito controassicurato*

Considereremo i due esempi seguenti

1. assicurazione temporanea caso morte a premio unico
2. assicurazione di capitale differito a premio annuo costante pagabile per l’intera durata contrattuale

Assicurazione temporanea caso morte, capitale unitario, premio unico

Controassicurazione $\Rightarrow$ pagamento, in caso di sopravvivenza a scadenza, del premio unico di tariffa totale (cioè comprensivo del costo della controassicurazione) pagato

Beneficio della controassicurazione: $\Pi^{[\mathrm{tot}][\mathrm{T}]}$

Premio unico puro dell'assicurazione principale ($C = 1$):

$$\Pi^{[\mathrm{princ}]} = {}_m A'_x$$

Premio unico puro della controassicurazione:

$$\Pi^{[\mathrm{contr}]} = \Pi^{[\mathrm{tot}][\mathrm{T}]} \, {}_m E'_x$$

Premio unico puro totale:

$$\Pi^{[\mathrm{tot}]} = \Pi^{[\mathrm{princ}]} + \Pi^{[\mathrm{contr}]} = {}_m A'_x + \Pi^{[\mathrm{tot}][\mathrm{T}]} \, {}_m E'_x$$

Relazione tra un generico premio unico puro Π e il corrispondente premio di tariffa $\Pi^{[\mathrm{T}]}$, per un capitale unitario (*equazione di caricamento*):

$$\Pi^{[\mathrm{T}]} = \Pi + \alpha + \gamma\, \ddot{a}'_{x:m\rceil}$$

Sostituendo Π con $\Pi^{[\mathrm{tot}]}$, si ricava il premio unico di tariffa totale $\Pi^{[\mathrm{tot}][\mathrm{T}]}$

$$\Pi^{[\mathrm{tot}][\mathrm{T}]} = \frac{{}_mA'_x + \alpha + \gamma\, \ddot{a}'_{x:m\rceil}}{1 - {}_mE'_x}$$

Assicurazione complessiva risultante: mista con

- capitale 1 in caso morte
- capitale $\Pi^{[\mathrm{tot}][\mathrm{T}]}$ in caso vita a scadenza

Assicurazione di capitale differito, capitale unitario, premio annuo costante

Controassicurazione $\Rightarrow$ pagamento, in caso di decesso prima della scadenza, della somma dei premi annui di tariffa totali (cioè comprensivi del costo della controassicurazione) pagati

Beneficio della controassicurazione:

$$\begin{cases} (K_x + 1)\, P^{[\mathrm{tot}][\mathrm{T}]} & \text{se } 0 < T_x \leq m \\ 0 & \text{se } T_x > m \end{cases}$$

(con K_x = durata aleatoria troncata di vita)

Premio annuo puro dell'assicurazione principale

$$P^{[\mathrm{princ}]} = \frac{{}_mE'_x}{\ddot{a}'_{x:\overline{m}|}}$$

Premio unico puro della controassicurazione:

$$\Pi^{[\text{contr}]} = P^{[\text{tot}][\text{T}]} \underbrace{\sum_{h=1}^{m} h \; {}_{h-1|1}A'_x}_{{}_m(IA')_x}$$

Premio annuo puro della controassicurazione:

$$P^{[\text{contr}]} = \frac{\Pi^{[\text{contr}]}}{\ddot{a}'_{x:\overline{m}|}} = \frac{P^{[\text{tot}][\text{T}]} \; {}_m(IA')_x}{\ddot{a}'_{x:\overline{m}|}}$$

Premio annuo puro totale:

$$P^{[\text{tot}]} = P^{[\text{princ}]} + P^{[\text{contr}]} = \frac{{}_mE'_x}{\ddot{a}'_{x:\overline{m}|}} + \frac{P^{[\text{tot}][\text{T}]} \; {}_m(IA')_x}{\ddot{a}'_{x:\overline{m}|}}$$

Relazione tra un generico premio annuo puro P e il corrispondente premio annuo di tariffa $P^{[\mathrm{T}]}$, per un capitale unitario (*equazione di caricamento*):

$$P^{[\mathrm{T}]} = \frac{P + \dfrac{\alpha}{\ddot{a}'_{x:m\rceil}} + \gamma}{1 - \beta}$$

Sostituendo P con $P^{[\mathrm{tot}]}$, si ricava il premio unico di tariffa totale $P^{[\mathrm{tot}][\mathrm{T}]}$

$$P^{[\mathrm{tot}][\mathrm{T}]} = \frac{\dfrac{{}_mE'_x}{\ddot{a}'_{x:m\rceil}} + \dfrac{\alpha}{\ddot{a}'_{x:m\rceil}} + \gamma}{1 - \beta - \dfrac{{}_m(IA')_x}{\ddot{a}'_{x:m\rceil}}}$$

Assicurazione complessiva risultante: mista con

- capitale 1 in caso vita a scadenza
- capitale $(K_x + 1)\, P^{[\mathrm{tot}][\mathrm{T}]}$ in caso morte prima della scadenza

C.3 ASSICURAZIONI COMPLEMENTARI

Controassicurazione: particolare assicurazione *complementare* a completamento di un'assicurazione *principale*

Altre assicurazioni complementari: benefici dipendenti non dalla durata di vita dell'assicurato, ma altri eventi inerenti alla vita dell'assicurato, quali:

- ▷ invalidità causata da malattia o infortunio
- ▷ causa del decesso
- ▷ ...

Esempi

1. Cessazione (sospensione) dell'obbligo di pagamento dei premi annui in caso di invalidità permanente (temporanea) dell'assicurato
2. *Invalidità come decesso*: in assicurazioni con beneficio caso morte (temporanea caso morte, mista ordinaria, ecc.), pagamento del capitale assicurato al verificarsi di invalidità permanente (anziché al decesso)

3. *Assicurazione complementare per morte accidentale (ACMA)*: in assicurazioni con beneficio caso morte, raddoppio (o altra maggiorazione) del capitale assicurato in caso di decesso per infortunio
4. *Beneficio orfani*: in assicurazioni con beneficio caso morte, ulteriore pagamento del capitale assicurato al decesso del coniuge dell'assicurato qualora questo avvenga dopo quello dell'assicurato ma prima della scadenza del contratto e a condizione che sia in vita almeno un figlio (di età non superiore ad una prefissata) $\Rightarrow$ particolare assicurazione su tre teste
5. *Complementare di sopravvivenza*: in un'assicurazione caso morte stipulata a condizioni "aggravate" (maggiori probabilità di decesso), restituzione della somma degli aggravamenti di premio in caso di sopravvivenza a scadenza ($\Rightarrow$ esempio di contrassicurazione)

Calcolo dei premi delle assicurazioni complementari $\Rightarrow$ basi statistiche relative a invalidità, causa di decesso, ecc.

Pacchetti assicurativi

Pacchetto assicurativo: evoluzione del concetto di assicurazione principale + assicurazione complementare

Prodotto consistente nell'abbinamento di un'assicurazione sulla durata di vita (es. temporanea caso morte, mista, ecc.) con coperture per vari rischi concernenti la persona, in particolare la salute; esempi:

- ▷ rimborso spese mediche
- ▷ diaria per periodi di ricovero ospedaliero
- ▷ aumento della rata di una rendita vitalizia in caso di bisogno Long Term Care (invalidità senile)
- ▷ . . .

Un pacchetto assicurativo coinvolge vari "rami" assicurativi (vita, infortuni, malattie, ecc.) secondo le legislazioni europee

Esempio di implementazione: assicurazioni Universal Life (origine USA)

C.4 ASSICURAZIONI COLLETTIVE E SCHEMI PREVIDENZIALI

ASSICURAZIONI COLLETTIVE: ASPETTI GENERALI

Scopo: attuare schemi di previdenza complementare (*secondo pilastro previdenziale*) gestiti completamente da un assicuratore

Osservazione

Sistema previdenziale a tre pilastri:

- ▷ primo pilastro = previdenza pubblica
- ▷ secondo pilastro = previdenza complementare (rispetto a quella pubblica) fornita da fondi pensione, assicurazioni collettive, ecc.
- ▷ terzo pilastro = previdenza a livello individuale, realizzata mediante prodotti assicurativi e finanziari

Differenza (giuridica) tra insieme di assicurazioni individuali e assicurazione collettiva $\Rightarrow$ *unicità di contraenza* nell'assicurazione collettiva

- contraente: azienda (datore di lavoro)
- assicurati: dipendenti dell'azienda
- beneficiari:
  - ▷ dipendenti, per benefici caso vita
  - ▷ famigliari dei dipendenti, per benefici caso morte

Tipologia:

1. collettive *previdenziali* $\Rightarrow$ benefici caso vita (capitali differiti, rendite vitalizie)
2. collettive *di puro rischio* $\Rightarrow$ benefici in caso morte (ed eventualmente in caso di invalidità permanente)

Assicurazioni collettive e schemi previdenziali *(cont.)*

Osservazione

Talvolta chiamate impropriamente “assicurazioni collettive” alcune convenzioni stipulate da un assicuratore con un’azienda o associazione al fine di offrire a dipendenti o utenti di servizi erogati dall’azienda o associati la stipulazione di contratti assicurativi individuali a condizioni di favore (per es. minori caricamenti per spese)

Non unicità di contraenza $\Rightarrow$ termine “collettive” improprio

ASSICURAZIONI COLLETTIVE PREVIDENZIALI

Scopo principale: erogare rendite vitalizie a favore degli aderenti all'assicurazione collettiva

Struttura tecnica: per ogni aderente

- fase di accumulazione (solitamente finanziaria) durante l'attività lavorativa
- fase di decumulazione (pagamento della rendita vitalizia) durante il periodo di pensionamento

Collettiva previdenziale = insieme di "posizioni" individuali $\Rightarrow$ assenza di problemi tecnico-attuariali specifici delle collettive previdenziali

Assicurazioni collettive e schemi previdenziali *(cont.)*

Condizioni di contratto possono includere, per ogni posizione individuale:

- aumento delle prestazioni mediante retrocessione del sovrainteresse (vedi assicurazioni *rivalutabili*)
- rate iniziali certe (ad esempio 5 rate)
- controassicurazione (*capital protection*)
- opzione di *reversibilità*: rendita (o parte della stessa) pagata a un beneficiario designato dopo il decesso del pensionato

Caricamenti per spese solitamente minori di quelli relativi alle assicurazioni individuali, grazie ad economie “di scala” (in particolare per i costi di acquisizione)

ASSICURAZIONI COLLETTIVE “DI PURO RISCHIO”

Scopo: copertura contro il rischio di morte di ciascun dipendente dell’azienda durante il periodo di attività lavorativa; beneficiario = famiglia del dipendente

Struttura attuariale: insieme di assicurazioni caso morte monoannuali rinnovabili

Ciascuna posizione individuale finanziata a premio naturale (senza formazione di riserva matematica, a parte la riserva premi
$\Rightarrow$ assicurazioni di puro rischio)

Durata dell’assicurazione collettiva: usualmente pluriennale (ad es. 10 o 15 anni) con assicurati in ciascun anno i dipendenti in servizio in quell’anno

Capitali assicurati: usualmente collegati allo stipendio del dipendente
$\Rightarrow$ evitare effetti antiselettivi nella scelta di capitali elevati, anche in assenza di accertamenti sanitari

Possibile inclusione nell'assicurazione collettiva del rischio di invalidità permanente (vedi complementare "invalidità come decesso")

Usuali condizioni di contratto

- Caricamenti per spese solitamente minori di quelli relativi alle assicurazioni individuali, grazie ad economie "di scala"
- *Sconto di quantità*
  - ▷ riduzione del premio annuo di tariffa complessivo in funzione del numero di aderenti alla collettiva
- *Bonus di premio*
  - ▷ determinato in funzione dell'(eventuale) utile da sottomortalità conseguito in un dato intervallo di tempo (ad esempio 5 anni)
    $\Rightarrow$ partecipazione del contraente all'utile dell'assicuratore
  - ▷ corrisposto in detrazione dai premi annui futuri
  - ▷ realizza un meccanismo di experience rating

SCHEMI PREVIDENZIALI: TIPOLOGIA DEI BENEFICI

Vedi Figura a fine capitolo

Beneficio retributivo: l'ammontare del beneficio è legato all'ultima retribuzione prima dell'ingresso in quiescenza o ad un'opportuna media delle ultime retribuzioni, essendo per contro indipendente dall'entità dei contributi versati $\Rightarrow$ si perde, per definizione, il legame tra contributi e benefici relativi a ciascun assicurato

Attuazione limitata di fatto a sistemi previdenziali pubblici (primo pilastro) operanti con il regime della pura ripartizione (pay-as-you-go) $\Rightarrow$ i contributi relativi agli assicurati attivi finanziano non i benefici futuri a favore di tali assicurati, bensì i benefici correnti a favore dei pensionati

Beneficio contributivo: qualunque tipo di beneficio legato, mediante assegnata formula, ai contributi versati $\Rightarrow$ tipo di beneficio che interessa gli schemi di previdenza complementare

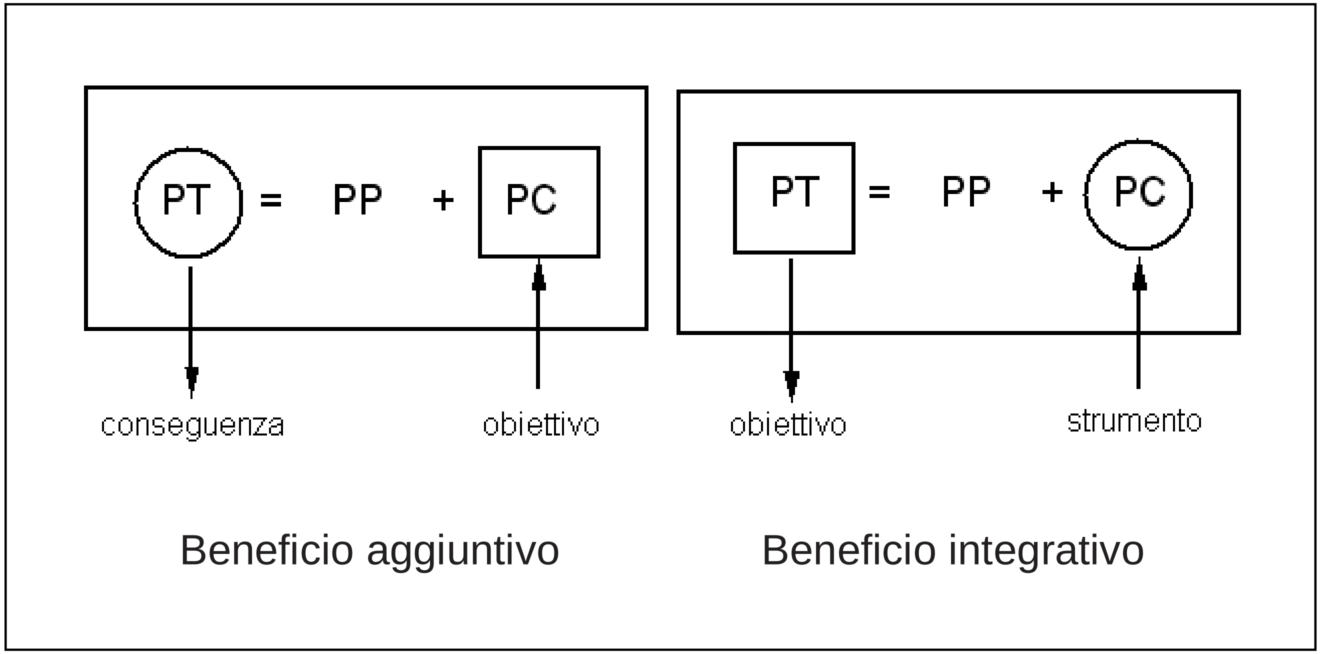
Schema a *contributo definito*: è stabilita la sequenza di contributi mentre l'ammontare del beneficio è determinato, secondo un'assegnata formula, in funzione di tale sequenza. Possibile presenza di garanzie. Esempi:

- applicazione, ai contributi versati, di un tasso di rendimento non inferiore ad un minimo garantito $\Rightarrow$ rischio finanziario trasferito dall'assicurato al gestore
- improbabile garanzia sul coefficiente di conversione in rendita

Schema a *beneficio definito*: i contributi sono calcolati in modo da finanziare un assegnato livello di beneficio $\Rightarrow$ criteri per la definizione del beneficio (vedi Figura; PP = pensione di 1° pilastro)

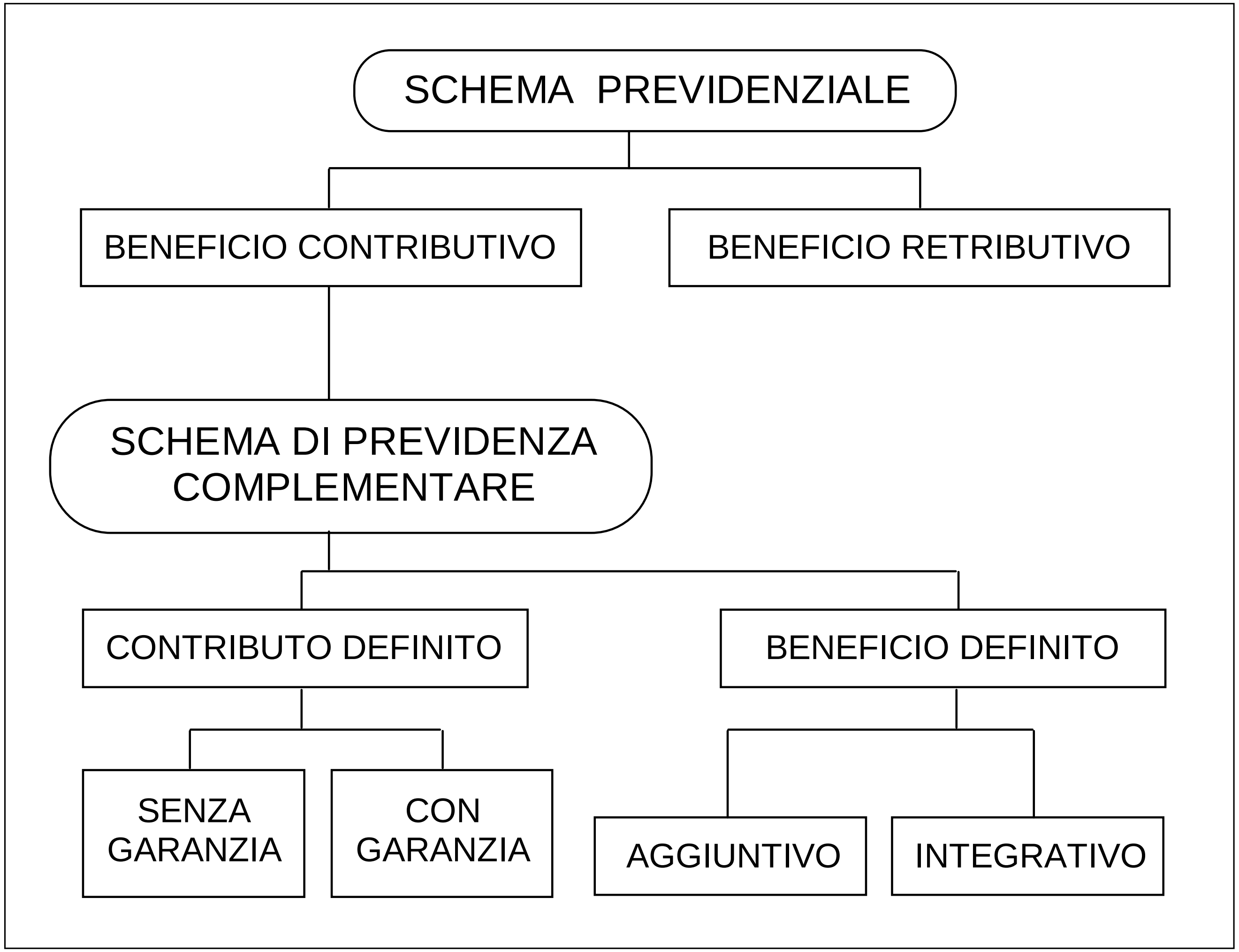
- *beneficio aggiuntivo*: oggetto di definizione il solo beneficio erogato dallo schema previdenziale, cioè la pensione complementare (PC)
- *beneficio integrativo*: oggetto di definizione l'ammontare totale di pensione (PT) che sarà ricevuto dall'assicurato

Assicurazioni collettive e schemi previdenziali *(cont.)*



Tipi di beneficio definito

Assicurazioni collettive e schemi previdenziali *(cont.)*

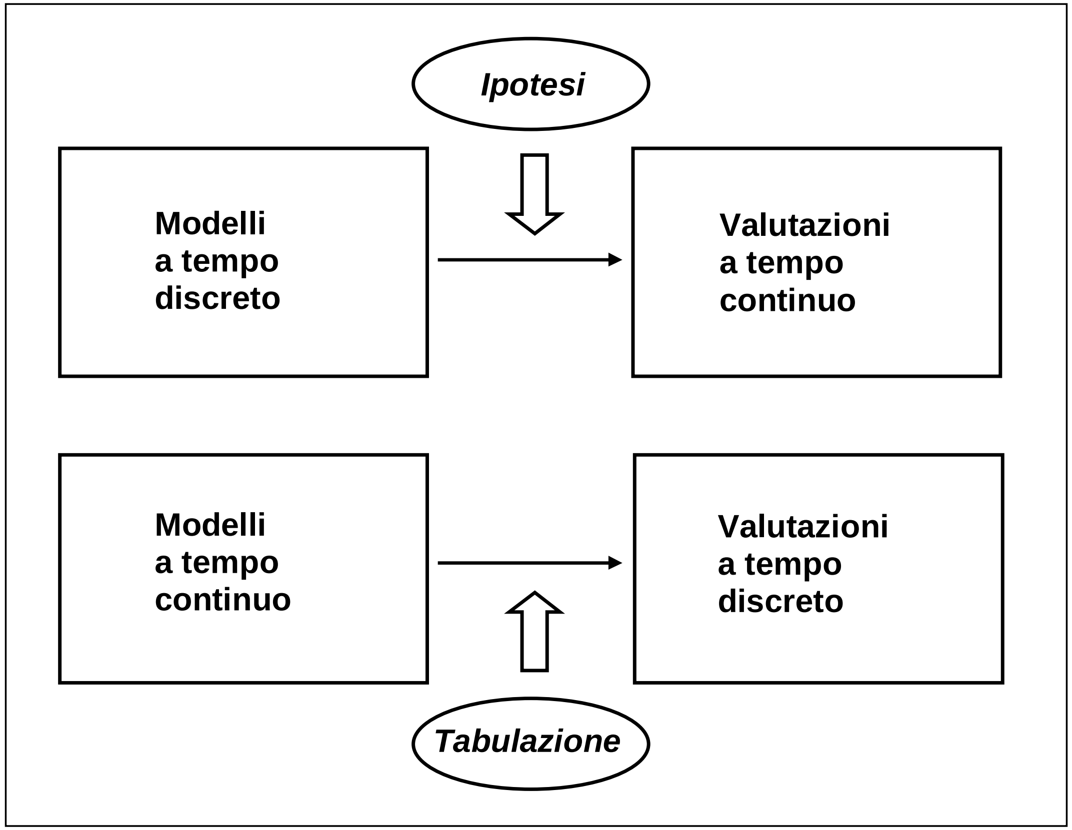


Tipologia dei benefici negli schemi previdenziali

C.5 VALORI ATTUARIALI IN MODELLI A TEMPO CONTINUO

INTRODUZIONE

Modelli a tempo continuo $\Rightarrow$ estensione delle valutazioni attuariali ad età e istanti reali qualsiasi



Possibilità di rappresentare esigenze pratiche quali ad esempio:

- pagamento del capitale subito dopo il decesso (anziché alla fine dell'anno di contratto in cui avviene il decesso)

o teoriche quali:

- pagamento di rendite con flusso continuo nel tempo (anziché con cadenza annuale, mensile, ecc.)

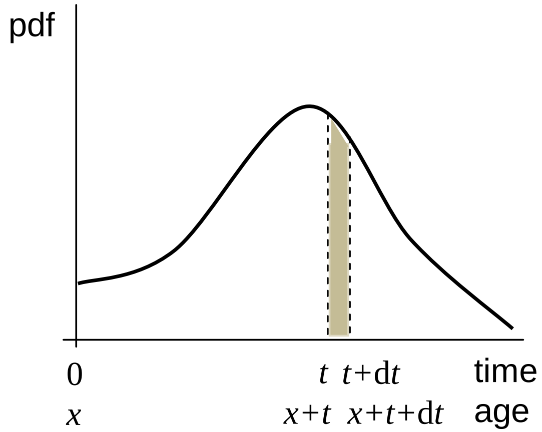
Base tecnica:

▷ intensità istantanea di interesse δ, $\delta = \ln(1+i) \;\Rightarrow$ fattore annuo di attualizzazione $\mathrm{e}^{-\delta} = (1+i)^{-1}$ (legge esponenziale)

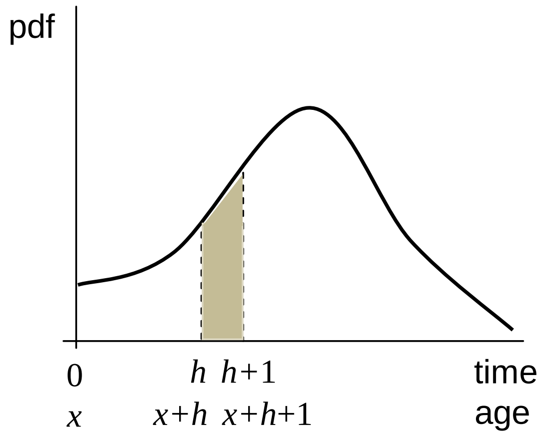
▷ funzione di sopravvivenza $S(x)$, o intensità di mortalità μ_x, o funzione di densità $f_x(t)$

Probabilità espresse in termini della funzione di densità (pdf), $f_x(t)$, della variabile aleatoria T_x:

$$f_x(t)\,\mathrm{d}t = \mathbb{P}[t < T_x \leq t + \mathrm{d}t]$$
$$= {}_{t|\mathrm{d}t}q_x$$

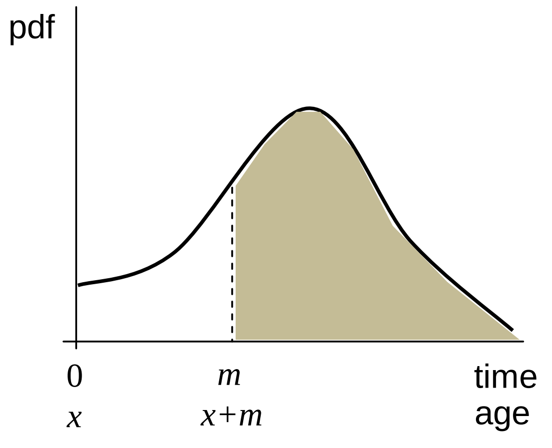


$$\int_h^{h+1} f_x(t)\,\mathrm{d}t = {}_{h|1}q_x$$

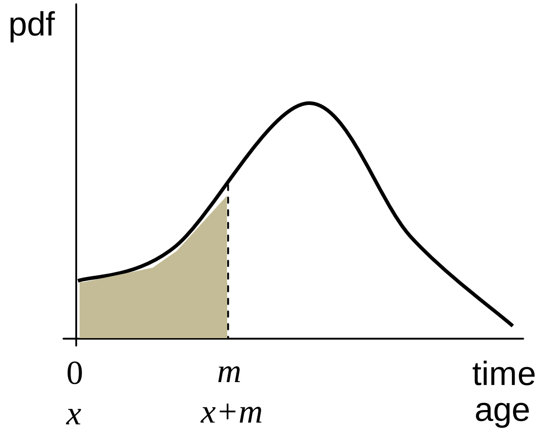


Valori attuariali in modelli a tempo continuo *(cont.)*

$$\int_{m}^{+\infty} f_x(t)\,\mathrm{d}t = {}_{m}p_x$$



$$\int_{0}^{m} f_x(t)\,\mathrm{d}t = {}_{m}q_x$$



APPROSSIMAZIONI PER IL MODELLO BIOMETRICO

Ipotesi per il "prolungamento" di valutazioni di probabilità

Problema: date le q_x per ogni x intero, approssimare per $0 < r < 1$:

- ▷ probabilità ${}_rq_x$ mediante funzione $\alpha_x(r)$
- ▷ probabilità ${}_{1-r}q_{x+r}$ mediante funzione $\beta_x(r)$

con $\alpha_x(r)$ e $\beta_x(r)$ di "semplice" espressione (almeno una delle due funzioni)

Condizioni (limiti):

$$\alpha_x(0^+) = 0; \quad \alpha_x(1^-) = q_x$$
$$\beta_x(0^+) = q_x; \quad \beta_x(1^-) = 0$$

Ipotesi di uniformità

Data funzione di sopravvivenza $S(x)$ sui soli x interi

Interpolazione lineare:

$$S(x+r) = (1-r)\,S(x) + r\,S(x+1); \quad 0 < r < 1$$

oppure

$$\ell_{x+r} = (1-r)\,\ell_x + r\,\ell_{x+1}; \quad 0 < r < 1$$

Quindi, numero atteso di decessi tra età x e $x+r$:

$${}_r d_x = \ell_x - \ell_{x+r} = r\,(\ell_x - \ell_{x+1}) = r\,d_x$$

cioè “uniformità” dei decessi nel generico intervallo unitario di età

Per le probabilità di decesso si trovano le espressioni:

$$
\begin{aligned}
{}_r q_x &= \frac{S(x) - S(x+r)}{S(x)} = r\, q_x && \Leftarrow\ \alpha_x(r) \\
{}_{1-r} q_{x+r} &= \frac{S(x+r) - S(x+1)}{S(x+r)} = \frac{(1-r)\, q_x}{1 - r\, q_x} && \Leftarrow\ \beta_x(r)
\end{aligned}
$$

Ipotesi di Balducci

Scopo: ottenere una più semplice espressione per ${}_{1-r} q_{x+r}$ (se applicata alle frequenze, risulta utile nelle procedure statistiche)

$$
{}_{1-r} q_{x+r} = (1-r)\, q_x
$$

Tale ipotesi corrisponde alla ipotesi di linearità a tratti della funzione $\dfrac{1}{S(x)}$

Prova: si ponga per interpolazione lineare

$$\frac{1}{S(x+r)} = (1-r)\,\frac{1}{S(x)} + r\,\frac{1}{S(x+1)}$$

Si ha allora:

$$\begin{aligned} {}_{1-r}q_{x+r} &= 1 - \frac{S(x+1)}{S(x+r)} \\ &= 1 - \left[(1-r)\,\frac{1}{S(x)} + r\,\frac{1}{S(x+1)}\right] S(x+1) = (1-r)\,q_x \quad \Leftarrow \ \beta_x(r) \end{aligned}$$

e, nella stessa ipotesi:

$${}_r q_x = \frac{r\,q_x}{1-(1-r)\,q_x} \qquad\qquad \Leftarrow \ \alpha_x(r)$$

Ipotesi di intensità di mortalità costante a tratti

Intensità costante tra x e $x+1$, per $x = 0, 1, 2, \ldots$

Si noti che risulta:

$$p_x = \frac{S(x+1)}{S(x)} = \mathrm{e}^{-\int_0^1 \mu_{x+t}\,\mathrm{d}t} \qquad (*)$$

e quindi:

$$q_x = 1 - \mathrm{e}^{-\int_0^1 \mu_{x+t}\,\mathrm{d}t} \qquad (**)$$

In base alla $(*)$, si assuma in particolare per qualunque r, $0 \le r < 1$:

$$\mu_{x+r} = -\ln p_x$$

e si ponga per semplicità

$$\hat{\mu}_x = \mu_{x+r} \quad \text{per} \quad 0 \le r < 1$$

Generalizzando la $(**)$ si ha:

$$ {}_z q_{x+u} = 1 - \mathrm{e}^{-\int_0^z \mu_{x+u+t}\,\mathrm{d}t} $$

e quindi con l'ipotesi di costanza a tratti:

$$ {}_r q_x = 1 - \mathrm{e}^{-\hat{\mu}_x\, r} \qquad \Leftarrow \ \alpha_x(r) $$

$$ {}_{1-r} q_{x+r} = 1 - \mathrm{e}^{-\hat{\mu}_x\,(1-r)} \qquad \Leftarrow \ \beta_x(r) $$

Approssimazioni: effetto sull'intensità di mortalità

Data la funzione di sopravvivenza $S(x)$ sui soli x interi, approssimare l'intensità di mortalità per ogni x reale

Intensità costante

$$ \mu_{x+r} = -\ln p_x; \quad 0 \le r < 1 $$

Ipotesi di uniformità

Risulta in generale:

$$\mu_{x+r} = -\frac{S'(x+r)}{S(x+r)}$$

$S(x+r)$ lineare a tratti $\Rightarrow$ $S'(x+r)$ costante per $0 < r < 1$; precisamente:

$$S'(x+r) = S(x+1) - S(x) = -S(x)\, q_x$$

e dunque:

$$\mu_{x+r} = \frac{S(x)\, q_x}{S(x+r)} = \frac{q_x}{1 - r\, q_x}; \quad 0 < r < 1$$

$\Rightarrow$ intensità crescente su ciascun intervallo $(x, x+1)$

Risulta poi:

$$\lim_{r \to 0^+} \mu_{x+r} = \lim_{r \to 0^+} \frac{q_x}{1 - r\, q_x} = q_x$$

$$\lim_{r \to 1^-} \mu_{x-1+r} = \lim_{r \to 1^-} \frac{q_{x-1}}{1 - r\, q_{x-1}} = \frac{q_{x-1}}{1 - q_{x-1}}$$

$\Rightarrow$ intensità discontinua nei punti di ascissa intera

Ipotesi di Balducci

Risulta:

$$\mu_{x+r} = -\frac{S'(x+r)}{S(x+r)} = \frac{-\frac{1}{S(x)} + \frac{1}{S(x+1)}}{(1-r)\,\frac{1}{S(x)} + r\,\frac{1}{S(x+1)}}$$

e, dopo qualche passaggio:

$$\mu_{x+r} = \frac{q_x}{1 - (1-r)\, q_x}$$

$\Rightarrow$ decrescente su ciascun intervallo $(x, x+1)$ (anche se crescente sugli interi)

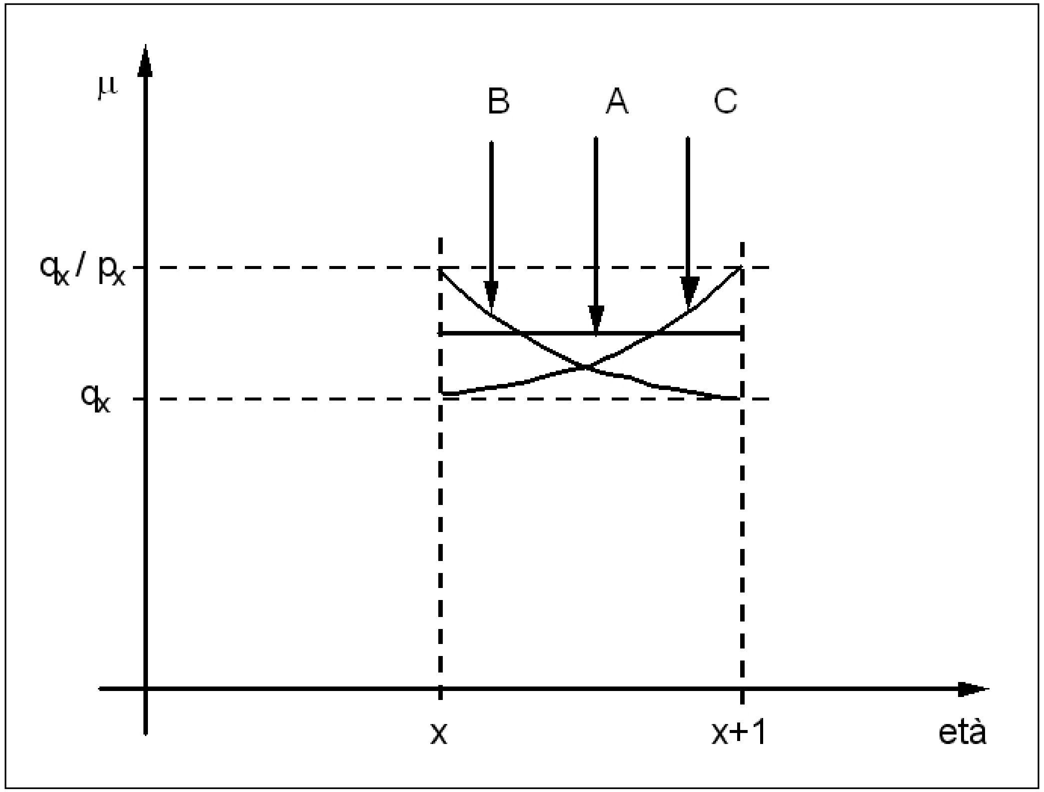
Risulta poi:

$$\lim_{r \to 0^+} \mu_{x+r} = \frac{q_x}{1 - q_x}$$
$$\lim_{r \to 1^-} \mu_{x-1+r} = q_{x-1}$$

$\Rightarrow$ intensità discontinua nei punti di ascissa intera

Intensità di mortalità nelle varie ipotesi: vedi Figure seguenti

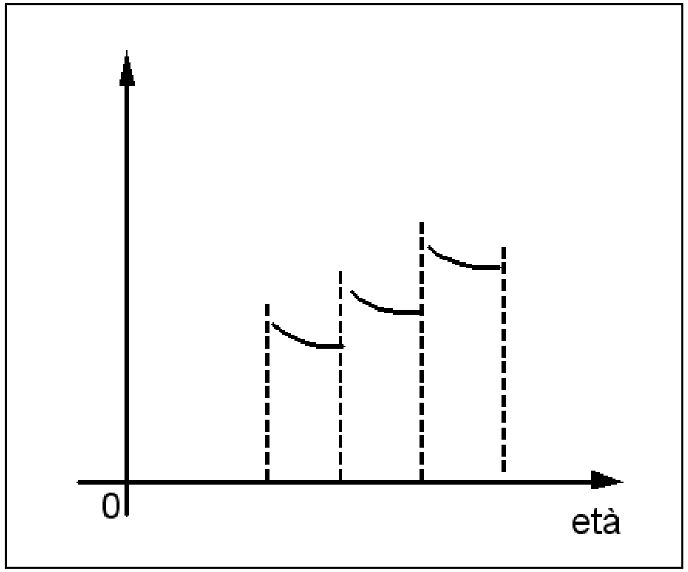
Valori attuariali in modelli a tempo continuo *(cont.)*

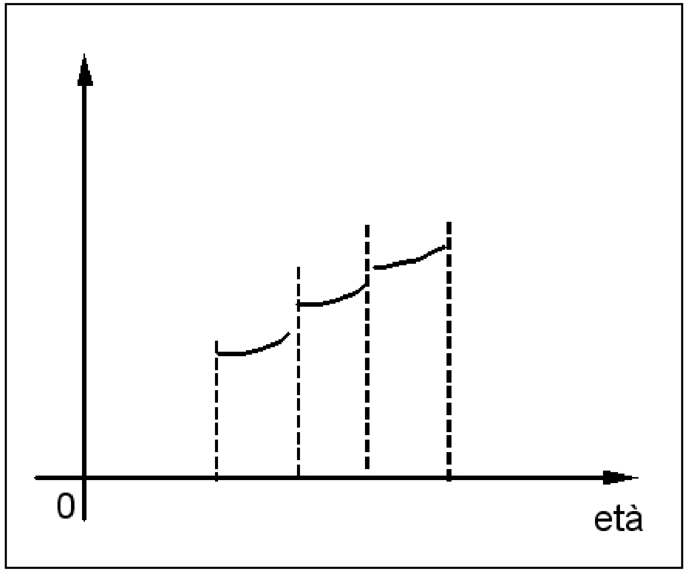


Intensità di mortalità nelle ipotesi:

A = intensità costante; B = Balducci; C = uniformità

Valori attuariali in modelli a tempo continuo *(cont.)*





Ipotesi B = Balducci

Ipotesi C = uniformità

Modello rettangolare - iperbolico

Tre ipotesi di approssimazione esaminate: casi particolari del modello di approssimazione definito, per $x = 0, 1, 2, \ldots$ e $0 < r < 1$ dalla:

$$\mu_{x+r} = \frac{1}{a_x - b\,r}$$

(1) Ponendo

$$b = 0; \quad a_x = -\frac{1}{\ln p_x}$$

si ottiene:

$$\mu_{x+r} = -\ln p_x$$

$\Rightarrow$ intensità costante a tratti

Valori attuariali in modelli a tempo continuo *(cont.)*

(2) Ponendo

$$b = 1; \quad a_x = \frac{1}{q_x}$$

si ottiene:

$$\mu_{x+r} = \frac{1}{\frac{1}{q_x} - r} = \frac{q_x}{1 - r\, q_x}$$

$\Rightarrow$ ipotesi di uniformità

(3) Ponendo

$$b = -1; \quad a_x = \frac{1}{q_x} - 1$$

si ottiene:

$$\mu_{x+r} = \frac{1}{\frac{1}{q_x} - 1 + r} = \frac{q_x}{1 - (1 - r)\, q_x}$$

$\Rightarrow$ ipotesi di Balducci

VALORI ATTUARIALI

Assicurazione di capitale differito

$$ {}_m\bar{E}_x = \mathrm{e}^{-\delta m} \, {}_m p_x = \mathrm{e}^{-\delta m} \frac{S(x+m)}{S(x)}; \qquad x, m \text{ reali } > 0 $$

Rendite vitalizie

Sia:

$\psi(t)$ = intensità istantanea di pagamento

Quindi:

$\psi(t)\,\mathrm{d}t$ = importo pagato nell'intervallo $(t, t + \mathrm{d}t)$ in caso di vita

Valore attuariale (all'epoca 0, età x) dell'importo $\psi(t)\,\mathrm{d}t$ pagato in caso di vita:

$$ \psi(t)\,\mathrm{d}t \; \mathrm{e}^{-\delta t} \, {}_t p_x $$

Valore attuariale totale dei pagamenti:

$$\int_0^{+\infty} \psi(t)\, \mathrm{e}^{-\delta t}\, {}_tp_x\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \psi(t)\, {}_t\bar{E}_x\, \mathrm{d}t$$

Di preminente interesse i modelli in cui $\psi(t)$ è assunta costante (negli intervalli in cui è $\neq 0$)

In particolare

- *rendita vitalizia immediata, non temporanea, unitaria*, definita da

  $$\psi(t) = 1 \quad \text{per } t \geq 0$$

  valore attuariale:

  $$\bar{a}_x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\delta t}\, {}_tp_x\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} {}_t\bar{E}_x\, \mathrm{d}t \qquad (*)$$

  (cfr. formula di Halley nel discreto)

Valori attuariali in modelli a tempo continuo *(cont.)*

- *rendita vitalizia immediata, temporanea, unitaria*, definita da

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 \leq t < m \\ 0 & \text{per } t \geq m \end{cases}$$

valore attuariale:

$$\bar{a}_{x:\overline{m}|} = \int_0^m {}_t\bar{E}_x \, \mathrm{d}t$$

- *rendita vitalizia differita, non temporanea, unitaria*, definita da

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 \leq t < m \\ 1 & \text{per } t \geq m \end{cases}$$

valore attuariale:

$$_{m|}\bar{a}_x = \int_m^{+\infty} {}_t\bar{E}_x \, \mathrm{d}t$$

Rendite vitalizie: impostazioni alternative

Valore attuale di una *rendita continua, immediata, unitaria, di durata certa* t:

$$\bar{a}_{t\rceil} = \int_0^t \mathrm{e}^{-\delta u}\,\mathrm{d}u \qquad (^\circ)$$

Rendita vitalizia $\Rightarrow$ durata aleatoria T_x (anziché durata certa t)

Valore attuale aleatorio:

$$\bar{a}_{T_x\rceil} = \int_0^{T_x} \mathrm{e}^{-\delta u}\,\mathrm{d}u$$

Nota:

- $\bar{a}_{t\rceil}$ = generica determinazione possibile di $\bar{a}_{T_x\rceil}$
- $\mathbb{P}[t < T_x \leq t + \mathrm{d}t] = f_x(t)\,\mathrm{d}t$ (vedi sopra)

Pertanto:

$$\mathbb{E}[\bar{a}_{\overline{T_x}|}] = \int_0^{+\infty} \bar{a}_{\overline{t}|}\, f_x(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\int_0^{t} \mathrm{e}^{-\delta u}\, f_x(t)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t$$

(cfr. formula di De Witt nel discreto)

Risulta poi:

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{t} \mathrm{e}^{-\delta u}\, f_x(t)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\delta u}\left[\int_u^{+\infty} f_x(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u$$

$$= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\delta u}\, {}_u p_x\,\mathrm{d}u$$

$\Rightarrow$ risultato identico a quello dato dalla formula $(*)$

$\Rightarrow$ analogia con l'equivalenza, nel modello a tempo discreto, tra formula di Halley e formula di De Witt

Dalla $(^\circ)$ si ottiene (se $\delta > 0$):

$$\bar{a}_{t\rceil} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\delta t}}{\delta}$$

per qualunque $t > 0$; quindi

$$\bar{a}_{T_x\rceil} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\delta\, T_x}}{\delta}$$

e infine:

$$\bar{a}_x = \mathbb{E}[\bar{a}_{T_x\rceil}] = \mathbb{E}\left[\frac{1 - \mathrm{e}^{-\delta\, T_x}}{\delta}\right] = \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta}\,\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\delta\, T_x}\right] \qquad (^{\circ\circ})$$

$\Rightarrow$ relazione tra valori attuariali relativi alla rendita vitalizia e all'assicurazione caso morte a vita intera

Assicurazione a vita intera caso morte

Capitale (unitario) pagato subito dopo il decesso $\Rightarrow$ valore attuale aleatorio:

$$Y = \mathrm{e}^{-\delta\, T_x}$$

Valore attuariale:

$$\bar{A}_x = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\delta\, T_x}] = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\delta t}\, f_x(t)\, \mathrm{d}t$$

Mediante la $(^{\circ\circ})$ si ottiene

$$\bar{A}_x = 1 - \delta\, \bar{a}_x$$

$\Rightarrow$ relazione analoga a quella valida nei modelli a tempo discreto

Assicurazione temporanea caso morte

$$Y = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\delta\, T_x} & \text{se } 0 < T_x \le m \\ 0 & \text{se } T_x > m \end{cases}$$

$${}_m\bar{A}_x = \int_0^m \mathrm{e}^{-\delta t}\, f_x(t)\, \mathrm{d}t$$

Assicurazione temporanea caso morte a capitale variabile

Capitale $C(t)$ in caso di decesso nell'intervallo $(t, t + \mathrm{d}t)$

$$Y = \begin{cases} C(T_x)\, \mathrm{e}^{-\delta\, T_x} & \text{se } 0 < T_x \le m \\ 0 & \text{se } T_x > m \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^m C(t)\, \mathrm{e}^{-\delta t}\, f_x(t)\, \mathrm{d}t$$

APPROSSIMAZIONI PER I VALORI ATTUARIALI

Valore attuariale $\bar{a}_x$ della rendita vitalizia:

$$\bar{a}_x = \int_0^{+\infty} {}_t\bar{E}_x \,\mathrm{d}t \;\approx\; \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{2} \left({}_hE_x + {}_{h+1}E_x \right)$$

$$= \frac{1}{2}\, {}_0\bar{E}_x + \sum_{h=1}^{+\infty} {}_hE_x \;=\; \frac{1}{2} + a_x \;=\; \frac{1}{2} + \ddot{a}_x - 1 \;=\; \ddot{a}_x - \frac{1}{2}$$

Valore attuariale $\bar{A}_x$ dell'assicurazione a vita intera caso morte:

$$\bar{A}_x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\delta t}\, f_x(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{h=0}^{+\infty} \int_h^{h+1} \mathrm{e}^{-\delta t}\, f_x(t)\,\mathrm{d}t$$

Per $h < t \leq h+1$, si approssimi:

$$\mathrm{e}^{-\delta t} \approx \mathrm{e}^{-\delta\left(h+\frac{1}{2}\right)} = (1+i)^{-\left(h+\frac{1}{2}\right)}$$

Si ottiene:

$$\bar{A}_x \approx \sum_{h=0}^{+\infty} (1+i)^{-\left(h+\frac{1}{2}\right)} \int_h^{h+1} f_x(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{h=0}^{+\infty} (1+i)^{-\left(h+\frac{1}{2}\right)} \, {}_{h|1}q_x = (1+i)^{\frac{1}{2}} A_x$$

$\Rightarrow \ (1+i)^{\frac{1}{2}}$ = *fattore correttivo* per tener conto del pagamento della somma assicurata subito dopo il decesso

Analogamente, per la temporanea:

$${}_m\bar{A}_x \approx (1+i)^{\frac{1}{2}} \, {}_mA_x$$

VALORI ATTUARIALI A INTENSITÀ D'INTERESSE NULLA

Con $\delta = 0$ ($\Leftrightarrow$ $i = 0$) si ha:

$$
\begin{aligned}
{}_m\bar{E}_x &= \mathrm{e}^{-\delta m}\, {}_m p_x = {}_m p_x = \frac{S(x+m)}{S(x)} \\
\bar{a}_x &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\delta t}\, {}_t p_x \,\mathrm{d}t = \frac{1}{S(x)} \int_0^{+\infty} S(x+t)\,\mathrm{d}t = \bar{e}_x \\
\bar{A}_x &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\delta t} f_x(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_x(t)\,\mathrm{d}t = 1 \\
{}_m\bar{A}_x &= \int_0^{m} \mathrm{e}^{-\delta t} f_x(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{m} f_x(t)\,\mathrm{d}t = {}_m q_x
\end{aligned}
$$

DISUGUAGLIANZA DI JENSEN

Valori attuariali: valori attesi di funzioni della durata aleatoria di vita

$$\text{valore attuariale} = \mathbb{E}[g(T_x)]$$

dove la funzione g esprime la struttura dei benefici e il calcolo dei relativi valori attuali

In generale

$$\mathbb{E}[g(T_x)] \gtreqless g(\mathbb{E}[T_x])$$

Se g lineare $\Rightarrow$ $\mathbb{E}[g(T_x)] = g(\mathbb{E}[T_x])$

La relazione tra $\mathbb{E}[g(T_x)]$ e $g(\mathbb{E}[T_x])$ dipende (in particolare) da concavità / convessità della funzione g $\Rightarrow$ disuguaglianza di Jensen

Interesse: relazione tra valore attuariale e valore attuale dei benefici calcolato sulla vita attesa $\bar{e}_x = \mathbb{E}[T_x]$

Siano:

T una variabile aleatoria (v.a.)

$g(t)$ una funzione reale di variabile reale

$g'(t)$ la derivata prima di $g(t)$

Si supponga g concava; allora, comunque fissato t_0:

$$g(t) \leq g(t_0) + g'(t_0)\,(t - t_0) \qquad \text{per qualunque } t$$

Con riferimento alla v.a. T:

$$g(T) \leq g(t_0) + g'(t_0)\,(T - t_0)$$

e, posto $t_0 = \mathbb{E}[T]$:

$$g(T) \leq g(\mathbb{E}[T]) + g'(\mathbb{E}[T])\,(T - \mathbb{E}[T])$$

Passando ai valori attesi, essendo

$$\mathbb{E}[g(\mathbb{E}[T])] = g(\mathbb{E}[T])$$

$$\mathbb{E}[T - \mathbb{E}[T]] = 0$$

si trova la *disuguaglianza di Jensen*:

$$\mathbb{E}[g(T)] \ \leq \ g(\mathbb{E}[T])$$

In caso di funzione g convessa:

$$\mathbb{E}[g(T)] \ \geq \ g(\mathbb{E}[T])$$

Esempi

Assicurazione a vita intera caso morte

Valore attuariale

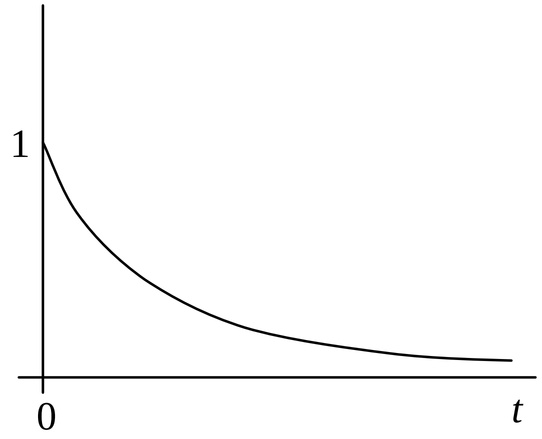
$$\bar{A}_x = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\delta T_x}]$$

$g(t) = \mathrm{e}^{-\delta t}$ *convessa, quindi:*

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\delta T_x}] \geq \mathrm{e}^{-\delta\,\mathbb{E}[T_x]}$$

cioè

$$\bar{A}_x \geq \mathrm{e}^{-\delta\,\bar{e}_x}$$

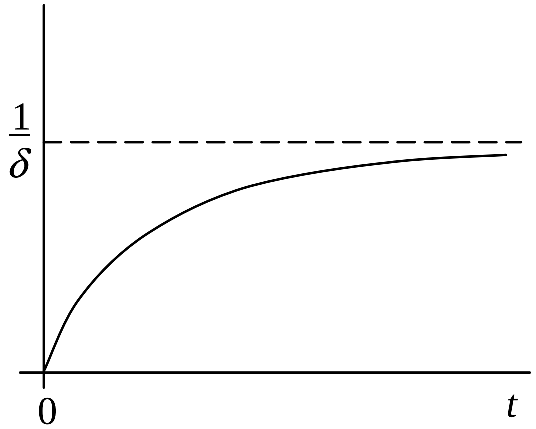


Rendita vitalizia immediata, non temporanea

Valore attuariale

$$\bar{a}_x = \mathbb{E}[\bar{a}_{\overline{T_x}|}] = \mathbb{E}\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-\delta T_x}}{\delta}\right]$$

$$g(t) = \frac{1-\mathrm{e}^{-\delta t}}{\delta}$$ *concava, quindi:*



$$\mathbb{E}[\bar{a}_{\overline{T_x}|}] \le \frac{1-\mathrm{e}^{-\delta\,\mathbb{E}[T_x]}}{\delta}$$

cioè

$$\bar{a}_x \le \bar{a}_{\overline{\bar{e}_x}|}$$

RISERVE. RISCHIO E RISPARMIO. UTILI ATTESI

Prodotto assicurativo

- x = età all'ingresso, m = durata contrattuale
- $P(t)$ = intensità istantanea di premio
  $\Rightarrow$ $P(t)\,\mathrm{d}t$ = premio pagato in $(t, t+\mathrm{d}t)$ in caso di vita
- $C(t)$ = beneficio caso morte pagato se l'assicurato decede in $(t, t+\mathrm{d}t)$
- S = beneficio caso vita pagato se l'assicurato è in vita in m

Esempi

- tempor. caso morte a capitale cost. o variabile $\Rightarrow$ $C(t) > 0$ per $0 \leq t \leq m$ e $S = 0$
- capitale differito $\Rightarrow$ $S > 0$ e $C(t) = 0$ per $0 \leq t \leq m$
- mista ordinaria $\Rightarrow$ $C(t) = S > 0$ per $0 \leq t \leq m$

Riserva matematica prospettiva

Definita analogamente al caso discreto

$$
\begin{aligned}
V(t) &= \mathrm{Ben}(t,m) - \mathrm{Prem}(t,m) \\
&= \int_t^m C(u)\,\mathrm{e}^{-\delta(u-t)}\,f_{x+t}(u-t)\,\mathrm{d}u + S\,\mathrm{e}^{-\delta(m-t)}\,{}_{m-t}p_{x+t} \\
&- \int_t^m P(u)\,\mathrm{e}^{-\delta(u-t)}\,{}_{u-t}p_{x+t}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

Rischio e risparmio

Derivazione rispetto a t della $V(t)$ $\Rightarrow$ equazione differenziale della riserva $\Rightarrow$ scomposizione rischio + risparmio

Nota: risulta $f_{x+t}(u-t)\,\mathrm{d}u = {}_{u-t}p_{x+t}\,\mu_{x+u}\,\mathrm{d}u$

Dall'equazione di $V(t)$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(t) &= \int_t^m C(u)\,\mathrm{e}^{-\delta(u-t)}\,\delta\,{}_{u-t}p_{x+t}\,\mu_{x+u}\,\mathrm{d}u + S\,\mathrm{e}^{-\delta(m-t)}\,\delta\,{}_{m-t}p_{x+t}\\ &\quad - \int_t^m P(u)\,\mathrm{e}^{-\delta(u-t)}\,\delta\,{}_{u-t}p_{x+t}\,\mathrm{d}u\\ &\quad + \int_t^m C(u)\,\mathrm{e}^{-\delta(u-t)}\,{}_{u-t}p_{x+t}\,\mu_{x+t}\,\mu_{x+u}\,\mathrm{d}u + S\,\mathrm{e}^{-\delta(m-t)}\,{}_{m-t}p_{x+t}\,\mu_{x+t}\\ &\quad - \int_t^m P(u)\,\mathrm{e}^{-\delta(u-t)}\,{}_{u-t}p_{x+t}\,\mu_{x+t}\,\mathrm{d}u - C(t)\,\mu_{x+t} + P(t)\end{aligned}$$

Pertanto (*Equazione differenziale di Thiele, 1875*):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(t) = \delta\,V(t) - \underbrace{[C(t) - V(t)]}_{\text{capitale sotto rischio}}\,\mu_{x+t} + P(t)$$

Lettura dell'equazione in termini differenziali:

$$\mathrm{d}V(t) = \delta\, V(t)\,\mathrm{d}t - [C(t) - V(t)]\,\mu_{x+t}\,\mathrm{d}t + P(t)\,\mathrm{d}t \qquad (*)$$

Interpretazione:

Variazione della riserva ($\mathrm{d}V(t)$) nell'intervallo $(t, t + \mathrm{d}t)$ =

interessi sulla riserva in t ($\delta\, V(t)\,\mathrm{d}t$)

+

premio introitato ($P(t)\,\mathrm{d}t$)

-

costo atteso della copertura caso morte per l'importo del capitale sotto rischio ($[C(t) - V(t)]\,\mu_{x+t}\,\mathrm{d}t$)

Dalla $(^*)$ si ricava:

$$P(t)\,\mathrm{d}t = [C(t) - V(t)]\,\mu_{x+t}\,\mathrm{d}t + [\mathrm{d}V(t) - \delta\,V(t)\,\mathrm{d}t]$$

$\Rightarrow$ scomposizione del premio in:

premio di rischio

$$P^{[\mathrm{R}]}(t)\,\mathrm{d}t = [C(t) - V(t)]\,\mu_{x+t}\,\mathrm{d}t$$

premio di risparmio

$$P^{[\mathrm{S}]}(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}V(t) - \delta\,V(t)\,\mathrm{d}t \qquad (^\circ)$$

Ruolo delle due componenti di premio:

- Premio di rischio $\Rightarrow$ costo atteso della copertura caso morte per l'importo del capitale sotto rischio

- Premio di risparmio $\Rightarrow$ variazione (in termini deterministici) in $(t, t + \mathrm{d}t)$ della riserva matematica
  Equazione $(^\circ)$ in forma di equazione differenziale nell'incognita $V(t)$:
  $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(t) = \delta V(t) + P^{[\mathrm{S}]}(t)$$
  Scelto un punto iniziale τ ($0 \leq \tau \leq t$), con la condizione iniziale data dal valore $V(\tau)$, si trova:
  $$V(t) = V(\tau)\, \mathrm{e}^{\delta(t-\tau)} + \int_{\tau}^{t} P^{[\mathrm{S}]}(u)\, \mathrm{e}^{\delta\,(t-u)} \mathrm{d}u$$
  $\Rightarrow$ $V(t)$ = montante finanziario dei premi di risparmio

Utili attesi

Con riferimento all'Eq. $(^*)$, si assuma $C(t) = C$, $P(t) = P$; allora:

$$\underbrace{[\delta\, V(t)\, \mathrm{d}t + P\, \mathrm{d}t]}_{\text{income}} - \underbrace{[\mathrm{d}V(t) + (C - V(t))\, \mu_{x+t}\, \mathrm{d}t]}_{\text{outgo}} = 0 \qquad (^\circ)$$

Siano δ^*, μ^* gli elementi della base di secondo ordine

Valutazione con base di secondo ordine $\Rightarrow$ situazione di non equilibrio:

$$\underbrace{[\delta^*\, V(t)\, \mathrm{d}t + P\, \mathrm{d}t]}_{\text{income}} - \underbrace{[\mathrm{d}V(t) + (C - V(t))\, \mu^*_{x+t}\, \mathrm{d}t]}_{\text{outgo}} = \gamma^*(t)\, \mathrm{d}t \qquad (^{\circ\circ})$$

dove $\gamma^*(t)$ = intensità di utile atteso

Sottraendo la $(^\circ)$ dalla $(^{\circ\circ})$, si ottiene:

$$\gamma^*(t) = (\delta^* - \delta)\, V(t) + \big(\mu_{x+t} - \mu^*_{x+t}\big)\big(C - V(t)\big)$$

con componenti:

- margine $\ {}_{\mathrm{F}}\gamma^*(t) = (\delta^* - \delta)\, V(t)$
- margine di motalità / longevità $\ {}_{\mathrm{M}}\gamma^*(t) = \big(\mu_{x+t} - \mu^*_{x+t}\big)\big(C - V(t)\big)$