

## Corso propedeutico - esercizi 2

**Parole chiave:** insiemi, elementi, appartenenza, inclusione, sottoinsieme, insieme vuoto, insieme universo, insieme delle parti, insieme complementare, intersezione, unione, differenza, differenza simmetrica, leggi di De Morgan, coppie ordinate, prodotto cartesiano di insiemi.

- 1) Siano  $A, B$  insiemi. Si provi che  $A \cap B = B$  se e solo se  $A \cup B = A$  se e solo se  $B \subseteq A$ .
- 2) Siano  $A, B, C$  insiemi. Se  $A \cup (B \cap C) = A$  e  $B \cup C = C$ , si verifichi che  $A \cap (B \cap C) = B$ .
- 3) Siano  $A, B, C$  insiemi. Si provi che  $B \setminus A = B \setminus C$  se e solo se  $A \cap B = B \cap C$ .
- 4) Siano  $A, B, C$  insiemi. Indichiamo con  $|A|$  il numero degli elementi di  $A$ . Supponiamo che  $|A| = |B| = |C| = 5$ . Determinare  $|A \cup B \cup C|$  sapendo che  $A \cap B = \emptyset$  e  $|A \cap C| = |B \cap C| = 1$ .
- 5) Siano  $A$  e  $B$  due insiemi e siano  $\mathcal{P}(A)$  e  $\mathcal{P}(B)$  i rispettivi insiemi delle parti. Si provi che

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B), \quad \mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B).$$

Si trovi un esempio di insiemi  $A$  e  $B$  per cui sia  $\mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ .

- 6) Sia, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n = \{x \in \mathbb{R} : n < x < n + 1\}$ . Si determinino

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

- 7) Sia, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $B_n = \{x \in \mathbb{R} : x \geq n\}$ . Si determinino

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n, \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n.$$

- 8) Sia, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n$  un sottoinsieme di  $U$ . Si provi che

$$\mathcal{C}_U\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_U A_n, \quad \mathcal{C}_U\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_U A_n.$$