

Corsi di Laurea Triennale in Ingegneria Navale e Industriale

Geometria

Docente: Prof. Daniele Zuddas

Anno accademico 2024–2025

Insiemi

Insieme. Collezione di elementi (oggetti) di cui non si considera l'ordine e senza ripetizioni.

Un insieme si può assegnare elencandone gli elementi tra parentesi graffe

$$\{1\}, \{3, -7, 42\}, \{2, 12, 132, -1, 0\}$$

Esiste un insieme senza elementi, detto insieme vuoto e denotato con \emptyset

In molti casi un insieme si assegna specificando una proprietà \mathcal{P} che ne caratterizza gli elementi. In simboli

$$X = \{x \mid x \text{ soddisfa } \mathcal{P}\}$$

X è quindi l'insieme di tutti e soli gli elementi che hanno la proprietà \mathcal{P} , qualunque essa sia.

Esempio. $\mathbb{N} = \{x \mid x \text{ è un numero naturale}\}$ è l'insieme infinito dei numeri naturali, ad esempio $0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$. Non è possibile elencarli tutti (i puntini non risolvono il problema...).

Per affermare che un elemento x appartiene all'insieme X si scrive

$$x \in X$$

e si legge “ x appartiene a X ”. Il simbolo di non appartenenza è \notin .

Per esempio $2 \in \{5, 3, 10, 2, 0\}$ ma $1 \notin \{5, 3, 10, 2, 0\}$.

Per affermare che un insieme X è contenuto in un insieme Y si scrive

$$X \subset Y$$

e si legge “ X è sottoinsieme di Y ” o anche “ X è contenuto in Y ”.

Precisamente questo significa che ogni elemento di X appartiene a Y .

Non confondere inclusione (di sottoinsiemi) e appartenenza (di elementi).

Per esempio

$$\{0, 3\} \subset \{5, 3, 10, 2, 0\}, \quad 3 \in \{5, 3\}, \quad \{3\} \subset \{5, 3\}, \quad \{3\} \notin \{5, 3\}$$

$$\{0, 3\} \notin \{10, 2, 0\}, \quad \{0, 3\} \in \{10, 2, 0, \{3, 0\}\}.$$

Se $X \subset Y$ scriviamo anche $Y \supset X$ (si legge Y contiene X).

Due insiemi X e Y sono uguali (sono lo stesso insieme) se hanno gli stessi elementi: $X = Y$ se e solo se $X \subset Y$ e $Y \subset X$. Ad esempio

$$\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\} \quad \text{ma} \quad \{1, 2\} \neq \{3, 2\}.$$

Operazioni tra insiemi

Intersezione. $X \cap Y := \{x \mid x \in X \text{ e } x \in Y\}$

Esempio: $\{1, 2, 3, 5\} \cap \{10, 9, 1, 3, 5\} = \{1, 3, 5\}$.

Si ha $X \cap Y \subset X$ e $X \cap Y \subset Y$.

X e Y sono detti disgiunti se $X \cap Y = \emptyset$, ovvero se X e Y non hanno nessun elemento in comune.

Unione. $X \cup Y := \{x \mid x \in X \text{ o } x \in Y\}$

Esempio: $\{1, 2, 3, 5\} \cup \{10, 9, 1, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 5, 10, 9\}$.

Si ha $X \subset X \cup Y$ e $Y \subset X \cup Y$.

Differenza insiemistica. $X - Y = X \setminus Y := \{x \mid x \in X \text{ e } x \notin Y\}$.

Esempi

$\{1, 2, 3, 5\} - \{10, 9, 3, 5\} = \{1, 2\}$.

$\{10, 9, 3, 5\} - \{1, 2, 3, 5\} = \{10, 9\}$.

Si ha $X - Y \subset X$, $X - X = \emptyset$, $X - \emptyset = X$ e $(X - Y) \cap Y = \emptyset$.

Se $X \cap Y = \emptyset$ allora $X - Y = X$.

Coppie ordinate. Una coppia ordinata (x, y) di elementi (detti componenti) è un insieme in cui conta l'ordine e sono ammesse ripetizioni. Ad esempio $(2, 3)$ è diverso da $(3, 2)$ ed è diverso da $\{2, 3\}$. Anche $(1, 1)$ è una coppia ordinata, in questo caso con le due componenti uguali.

n -uple ordinate. Più in generale si possono fare n -uple ordinate

$$(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

cioè insiemi di $n \geq 1$ componenti in cui conta l'ordine e sono ammesse ripetizioni. Le 2-uple sono le coppie, le 3-uple sono dette terne, le 4-uple quaterne.

Prodotto cartesiano. $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ e } y \in Y\}$ è l'insieme di tutte le coppie ordinate in cui la prima componente appartiene al primo insieme e la seconda al secondo insieme.

$$\{1, 2, 3\} \times \{3, 5\} = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 3), (3, 5)\}$$

Oss. Se X ha m elementi e Y ha n elementi allora $X \times Y$ ha mn elementi.

Più in generale si può definire il prodotto cartesiano di un numero n arbitrario di insiemi X_1, X_2, \dots, X_n

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n\}$$

cioè l'insieme di tutte le n -uple ordinate in cui la prima componente appartiene al primo insieme, la seconda al secondo e così via, in tutti i modi possibili.

Si pone $X^n = X \times \dots \times X$, prodotto di X con sé stesso n volte. Quindi $X^1 = X$, $X^2 = X \times X$, $X^3 = X \times X \times X$, ... Ad esempio

$$\{1, 2\}^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}.$$

Quantificatori. In Matematica e in logica si usano i seguenti quantificatori.

- \forall “per ogni” (quantificatore universale)
- \exists “esiste (almeno uno)” (quantificatore esistenziale)
- $\exists!$ “esiste unico” (quantificatore unico)
- \nexists “non esiste”

Numeri

Numeri naturali. L'insieme \mathbb{N} dei numeri naturali l'abbiamo già incontrato. In questo insieme è definita l'addizione e la moltiplicazione, ma non sempre si può fare la sottrazione o la divisione.

Numeri interi. $\mathbb{Z} = \{x \mid x \text{ è un numero intero}\}$ è l'insieme dei numeri interi, ad esempio

$$\dots, -4, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

Su \mathbb{Z} sono definite l'addizione, la moltiplicazione e la sottrazione.

Numeri razionali. $\mathbb{Q} = \{x \mid x \text{ è un numero razionale}\}$ è l'insieme dei numeri razionali, ad esempio

$$-3, 0, 5, \frac{1}{2}, \frac{17}{6}, -\frac{143}{141}, \dots$$

Su \mathbb{Q} sono definite l'addizione, la moltiplicazione, la sottrazione e la divisione per un numero diverso da 0.

Numeri reali. $\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ è un numero reale}\}$ è l'insieme dei numeri reali, ad esempio

$$-3, 0, 5, \frac{1}{2}, -\frac{17}{6}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt[3]{17}}{\sqrt{5}}, \pi, e, \dots$$

Come su \mathbb{Q} , anche su \mathbb{R} sono definite l'addizione, la moltiplicazione, la sottrazione e la divisione per un numero diverso da 0. Si ha

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Funzioni

Dati due insiemi X e Y , una *funzione* o *applicazione* o *mappa*

$$f : X \rightarrow Y$$

è una terna ordinata $f = (X, Y, G_f)$ dove $G_f \subset X \times Y$ soddisfa la proprietà seguente: per ogni $x \in X$ esiste un unico $y \in Y$ t.c. $(x, y) \in G_f$ e si scrive

$$y = f(x).$$

X si chiama *dominio*, Y *codominio* e G_f si chiama *grafico* di f . Pertanto $(x, f(x)) \in G_f$ e possiamo anche scrivere

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}.$$

L'elemento $f(x) \in Y$ si dice *immagine* di $x \in X$ tramite f .

Oss. Per una funzione dominio, codominio e grafico non vanno "trovati" essendo dati a priori. Il grafico rappresenta la "legge" che permette di associare ad ogni elemento del dominio il corrispondente elemento del codominio.

Per definire una funzione occorre quindi dare dominio, codominio e grafico. In pratica, in molti casi, la definizione di una funzione è data mediante una formula.

Esempio.

$$h : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2\}$$

$$1 \mapsto 2$$

$$2 \mapsto 1$$

$$3 \mapsto 2$$

è la funzione con grafico $G_h = \{(1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$.

Esempio.

$$g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$g(n) = 3n - n^2$$

Per ogni insieme X si definisce la *funzione identica*

$$\text{id}_X : X \rightarrow X$$

$$\text{id}_X(x) = x$$