Funzione composta. Date $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$

$$g \circ f : X \to Z \qquad (\textit{composizione di } f \textit{ e } g)$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Attenzione all'ordine, non si possono in generale scambiare!
Si ha: $f \circ \mathrm{id}_X = f = \mathrm{id}_Y \circ f$.

Immagine. Data $f: X \to Y$ si chiama *immagine* di f il sottoinsieme

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in X\} \subset Y$$

i cui elementi sono tutte e sole le immagini degli elementi di X.

Funzioni iniettive. $f: X \to Y$ è *iniettiva* se

$$\forall\, x_1, x_2 \in X,\ \ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Equivalentemente:
f iniettiva $\Leftrightarrow$ elementi con la stessa immagine sono uguali.
f iniettiva $\Leftrightarrow$ elementi distinti vanno in elementi distinti.

Esempi.

$$\begin{aligned} h: \{1,2,3\} &\to \{1,2\} \\ 1 &\mapsto 2 \\ 2 &\mapsto 1 \\ 3 &\mapsto 2 \end{aligned}$$

non è iniettiva perché $h(1) = h(3) = 2$.

$$\begin{aligned} k: \{1,2,3\} &\to \{1,2,3,4\} \\ 1 &\mapsto 3 \\ 2 &\mapsto 1 \\ 3 &\mapsto 2 \end{aligned}$$

è iniettiva

Funzioni suriettive. $f: X \to Y$ è *suriettiva* se

$$\mathrm{Im}(f) = Y.$$

Equivalentemente:
f suriettiva $\Leftrightarrow$ ogni elemento del codominio è immagine di almeno un elemento del dominio.

Negli esempi precedenti, h è suriettiva mentre k no.

Funzioni biiettive. $f: X \to Y$ è *biiettiva* (o *biunivoca*) se è iniettiva e suriettiva. Per esempio h e k non sono biiettive mentre lo è la funzione

$$\begin{aligned} p: \{1,2,3\} &\to \{1,2,3\} \\ 1 &\mapsto 1 \\ 2 &\mapsto 3 \\ 3 &\mapsto 2 \end{aligned}$$

Funzioni invertibili. Una funzione $f: X \to Y$ è *invertibile* se esiste una funzione $h: Y \to X$ t.c. $h \circ f = \mathrm{id}_X$ e $f \circ h = \mathrm{id}_Y$. Se tale h esiste allora è unica e si denota con f^{-1} e si ha quindi $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$ e $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$. Si ha che una funzione è invertibile se e solo se è biiettiva. In particolare per dimostrare che una funzione è biiettiva è sufficiente esibire l'inversa. Nel nostro esempio si ha $p^{-1} = p$.

Oss. Per ogni insieme X si ha $\mathrm{id}_X^{-1} = \mathrm{id}_X$, cioè l'identità è biiettiva e coincide con la sua inversa.

Cardinalità. Dato un insieme finito X (con un numero finito di elementi) si chiama *cardinalità* di X il numero dei suoi elementi e si denota $|X|$ o anche $\#(X)$. Se X è infinito poniamo $|X| = \infty$. Ad esempio $|\emptyset| = 0$, $|\{3\}| = 1$, $\{1, 2, 9, 12\} = 4$, $|\mathbb{N}| = \infty$.

Siano ora X e Y insiemi finiti. Si ha

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$$

infatti nel contare gli elementi dell'unione se sommiamo la cardinalità di X e quella di Y stiamo contando due volte gli elementi dell'intersezione la cui cardinalità va sottratta per avere il risultato corretto.

Oss. Supponiamo X e Y insiemi finiti.

(*1*) $\exists\ f: X \to Y$ iniettiva $\Leftrightarrow |X| \leqslant |Y|$.

(*2*) $\exists\ f: X \to Y$ suriettiva $\Leftrightarrow |X| \geqslant |Y|$.

(*3*) $\exists\ f: X \to Y$ biiettiva $\Leftrightarrow |X| = |Y|$.

(*4*) Se $|X| = |Y|$ allora $f: X \to Y$ iniettiva $\Leftrightarrow$ suriettiva $\Leftrightarrow$ biiettiva.

Esempio.

$$\begin{gathered} f: \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\} \\ 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 4 \\ 4 \mapsto 2 \end{gathered}$$

biiettiva in quanto suriettiva. Calcoliamo f^{-1}, leggendo da destra a sinistra:

$$\begin{gathered} f^{-1}: \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\} \\ 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 4 \\ 3 \mapsto 1 \\ 4 \mapsto 3 \end{gathered}$$

Mappa d'inclusione. Se $A \subseteq X$ definiamo la *mappa d'inclusione*

$$\begin{aligned} &i_A: A \to X \\ &i_A(a) = a, \quad \text{per ogni } a \in A \end{aligned}$$

Oss. $i_A: A \to X$ è iniettiva.