Campi

$\mathbb{R}$ è munito delle operazioni $+$ e $\cdot$ che soddisfano le seguenti $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$:

(1)	$(a+b)+c = a+(b+c)$	Proprietà associativa per l'addizione
(2)	$a+0 = 0+a = a$	0 è elemento neutro per l'addizione
(3)	$a-a = 0$	$-a$ è l'inverso additivo (opposto) di a
(4)	$a+b = b+a$	Proprietà commutativa per l'addizione
(5)	$(ab)c = a(bc)$	Proprietà associativa per la moltiplicazione
(6)	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$	1 è elemento neutro per la moltiplicazione
(7)	$a \cdot a^{-1} = 1$	a^{-1} è l'inverso moltiplicativo di $a \neq 0$
(8)	$ab = ba$	Proprietà commutativa per la moltiplicazione
(9)	$a(b+c) = ab+ac$	Proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione

Un *campo* è un insieme non vuoto $\mathbb{K}$ munito di due operazioni denotate formalmente $+$ e $\cdot$ con due elementi $0 \neq 1$, che soddisfano le proprietà precedenti. Pertanto $\mathbb{R}$ è un campo, detto *campo dei numeri reali*. Si osservi che la proprietà distributiva è l'unica dove intervengono entrambe le operazioni $+$ e $\cdot$ e ne stabilisce un legame.

Esistono molti esempi di campi. In questo corso useremo il campo reale $\mathbb{R}$ e il campo complesso $\mathbb{C}$ (che sarà definito più avanti). Si osservi che anche $\mathbb{Q}$ è un campo rispetto alle usuali operazioni di addizione e moltiplicazione (*campo dei numeri razionali*).

L'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$ non è un campo perché non soddisfa la proprietà (7): una tale struttura algebrica è detta *anello commutativo*, che non studieremo in questo corso.

Spazi vettoriali numerici reali

Partiamo da un esempio importante:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

insieme di tutte le coppie ordinate (x, y) di numeri reali, dette *vettori*.
Consideriamo due operazioni su $\mathbb{R}^2$.

Addizione. $\forall\,(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ definiamo

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Si osservi che il $+$ a primo membro è l'operazione che stiamo definendo, mentre quelli a secondo membro sono l'usuale addizione di numeri reali. In sostanza per sommare due vettori di $\mathbb{R}^2$ si sommano le componenti corrispondenti, ottenendo così un terzo vettore di $\mathbb{R}^2$.

Esempio. $(3, -2) + (5, 4) = (8, 2)$.

Oss. L'addizione di vettori di $\mathbb{R}^2$ è associativa e commutativa, dato che lo è l'addizione di numeri reali.

Poniamo

$$0_{\mathbb{R}^2} := (0, 0)$$
$$-(x, y) := (-x, -y) \quad \forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2$$

si ha che $0_{\mathbb{R}^2}$ è elemento neutro per l'addizione

$$(x, y) + 0_{\mathbb{R}^2} = (x, y) \quad \forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2$$

e $-(x, y)$ è opposto additivo di (x, y)

$$(x, y) - (x, y) = 0_{\mathbb{R}^2}.$$

Moltiplicazione scalare. $\forall\,\alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2$ definiamo

$$\alpha(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha x, \alpha y).$$

Si osservi che a primo membro figura l'operazione che stiamo definendo, il prodotto di un numero per un vettore, mentre a secondo membro utilizziamo il prodotto di numeri. I numeri li chiameremo anche *scalari*.

Esempio. $3(2, -5) = (6, -15)$.
$-2(1, 1) + 3(2, 0) + (-3, 1) = (1, -1)$.

Un vettore $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si può rappresentare graficamente anche come una freccia nel piano cartesiano con origine in $0_{\mathbb{R}^2}$ e terminale nel punto di coordinate (x, y), fornendo un modello algebrico per i vettori geometrici piani usati anche in Fisica. La somma definita sopra coincide con quella ottenuta dalla regola del parallelogramma.

Le operazioni sulle coppie si generalizzano a

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}} = \big\{\underbrace{(x_1, \ldots, x_n)}_{\text{vettore}} \,\big|\, \underbrace{x_1, \ldots, x_n}_{\text{coordinate}} \in \mathbb{R}\big\},$$

insieme di tutte le n-uple ordinate di numeri reali, $n \in \mathbb{N}$ fissato. Chiamiamo *vettori* gli elementi di $\mathbb{R}^n$. x_i sono dette *coordinate* o *componenti*.

Addizione. $\forall\,(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ definiamo

$$(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)\stackrel{\text{def}}{=}(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n).$$

Moltiplicazione scalare. $\forall\,\alpha\in\mathbb{R}$, $\forall\,(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ definiamo

$$\alpha(x_1,\dots,x_n)\stackrel{\text{def}}{=}(\alpha x_1,\dots,\alpha x_n).$$

Def. $\mathbb{R}^n$ munito delle operazioni di addizione e moltiplicazione scalare definite sopra è detto *spazio vettoriale numerico reale di dimensione n*.

Vettore nullo. È il vettore avente tutte le componenti nulle

$$0_{\mathbb{R}^n}\stackrel{\text{def}}{=}(0,\dots,0)\in\mathbb{R}^n.$$

Spesso indicheremo il vettore nullo di $\mathbb{R}^n$ semplicemente con 0.

Vettore opposto. Per ogni $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ definiamo il *vettore opposto* ottenuto cambiando segno a tutte le componenti

$$-(x_1,\dots,x_n)\stackrel{\text{def}}{=}(-x_1,\dots,-x_n)$$

Naturalmente le operazioni di somma e moltiplicazione scalare si possono combinare in formule più complesse.

Esempio. $(3,-2,0)+2(1,1,4)=(5,0,8)$.

Spesso è preferibile scrivere i vettori di $\mathbb{R}^n$ come *vettori colonna* anziché come *vettori riga* come fatto finora, ovvero

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\quad\text{anziché}\quad(x_1,\dots,x_n).$$

Le operazioni definite sopra si applicano anche ai vettori colonna, senza modifiche sostanziali.

Esempio. Svolgiamo il seguente calcolo in $\mathbb{R}^4$:

$$-3\begin{pmatrix}2\\3\\1\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}5\\1\\-1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-7\\-5\\8\end{pmatrix}$$

Più in generale si possono fare *combinazioni lineari* di vettori, cioè espressioni del tipo

$$\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_kv_k$$

dove $k\in\mathbb{N}$, $\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{R}$ e $v_1,\dots,v_k\in\mathbb{R}^n$ (ciascun v_i è un vettore di $\mathbb{R}^n$, quindi una n-upla ordinata di numeri reali). Gli scalari $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ sono detti *coefficienti* della combinazione lineare dei vettori $v_1,\dots,v_k$.

Esempio.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

quindi il vettore a secondo membro è combinazione lineare dei tre vettori a primo membro, con coefficienti rispettivamente $1, -1, 4$.

Oss. $\mathbb{R}^3$ è il modello di spazio tridimensionale nel quale viviamo le esperienze di tutti i giorni. $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ è il modello di spazio-tempo quadridimensionale nel quale evolve lo spazio fisico nel tempo.