Numeri complessi

Per ogni numero reale $x \in \mathbb{R}$ si ha $x^2 \geqslant 0$. L'obiettivo di questa lezione è costruire un *campo* nel quale esista un elemento i t.c. $i^2 = -1$.

Nel seguito poniamo $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$. Abbiamo visto su $\mathbb{C}$, ovvero su $\mathbb{R}^2$, l'addizione e la moltiplicazione scalare

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \qquad \forall\, (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$$
$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y), \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Per definizione poniamo

$$i \overset{\text{def}}{=} (0, 1) \in \mathbb{C} \qquad \textit{(unità immaginaria).}$$

Le coppie del tipo $(x, 0)$ le consideriamo come numeri reali, scriviamo quindi x anziché $(x, 0)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Si ha quindi

$$(x, y) = (x, 0) + y(0, 1) = x + yi \quad \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Pertanto l'addizione e la moltiplicazione scalare si scrivono come

$$(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$
$$\alpha(x + yi) = \alpha x + \alpha y i$$

Teor. *Su $\mathbb{C}$ esiste un'unica struttura di campo t.c.*

(*1*) *l'addizione è quella considerata sopra;*

(*2*) *la moltiplicazione estende la moltiplicazione scalare;*

(*3*) $i^2 = -1$.

Dim. Unicità Supponiamo che una tale struttura di campo esista. Per ogni $x_1 + y_1 i$, $x_2 + y_2 i \in \mathbb{C}$ si ha:

$$\begin{aligned}(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) &= x_1x_2 + x_1y_2i + y_1ix_2 + y_1iy_2i = \\ &= x_1x_2 + x_1y_2i + y_1x_2i + y_1y_2i^2 = \\ &= x_1x_2 - y_1y_2 + (x_1y_2 + y_1x_2)i\end{aligned}$$

Dunque se la moltiplicazione su $\mathbb{C}$ esiste allora deve essere data da questa formula. D'altra parte l'addizione è già stata definita, e questo dimostra l'unicità della struttura di campo.

Esistenza La dimostrazione dell'unicità suggerisce in che modo va definita la moltiplicazione:

$$(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) \overset{\text{def}}{=} x_1x_2 - y_1y_2 + (x_1y_2 + y_1x_2)i.$$

Questa definizione estende la moltiplicazione scalare per un numero reale, come si vede subito ponendo $y_1 = 0$.

Resta da verificare che valgono le proprietà della definizione di campo viste nella lezione precedente. Per l'addizione sappiamo già che le proprietà sono soddisfatte. La verifica per la moltiplicazione è svolta di seguito.

Proprietà associativa.

$$(x_1 + y_1 i)\big((x_2 + y_2 i)(x_3 + y_3 i)\big) =$$
$$(x_1 + y_1 i)\big((x_2 x_3 - y_2 y_3) + (x_2 y_3 + y_2 x_3)i\big) =$$
$$= x_1 x_2 x_3 - x_1 y_2 y_3 - y_1 x_2 y_3 - y_1 y_2 x_3 +$$
$$+ (x_1 x_2 y_3 + x_1 y_2 x_3 + y_1 x_2 x_3 - y_1 y_2 y_3)i$$

Con un calcolo simile, lasciato per Esercizio, si verifica che

$$\big((x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i)\big)(x_3 + y_3 i)$$

è uguale all'espressione precedente, verificando la proprietà associativa.

Elemento neutro moltiplicativo. Ponendo $x_1 = 1$ e $y_1 = 0$, si ha subito

$$1(x + yi) = 1x + 1yi = x + yi.$$

$i^2 = -1.$ È immediato ponendo $x_1 = x_2 = 0$ e $y_1 = y_2 = 1$.

Inverso. Osserviamo che

$$(x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}.$$

Quindi $x + yi \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ oppure $y \neq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \neq 0 \Rightarrow$

$$(x + yi)\frac{(x - yi)}{x^2 + y^2} = 1.$$

Dunque

$$(x + yi)^{-1} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i$$

Proprietà commutativa. Ciascun addendo non cambia se si scambiano gli indici 1 e 2.

Proprietà distributiva. Si tratta di svolgere il calcolo e verificare che vale questa proprietà. Esercizio. □

Def. $\mathbb{C}$ con questa struttura di campo è detto *campo complesso*. Gli elementi di $\mathbb{C}$ sono detti *numeri complessi*.

Oss. Per definizione, ogni numero complesso $z \in \mathbb{C}$ si scrive in modo unico come $z = x + yi$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

Oss. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $x = x + 0i \in \mathbb{C}$ e quindi possiamo considerare

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

N. B. Generalmente continueremo ad utilizzare la notazione $\mathbb{R}^2$ per indicare l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali, quando non saremo interessati alla struttura moltiplicativa.

Def. Per ogni $z = x + yi \in \mathbb{C}$, con $x, y \in \mathbb{R}$, definiamo

- la *parte reale* di z come $\mathrm{Re}(z) = x \in \mathbb{R}$
- la *parte immaginaria* di z come $\mathrm{Im}(z) = y \in \mathbb{R}$
- il *modulo* di z come $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} \geqslant 0$
- il *coniugato* di z come $\bar{z} = x - yi = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)\, i \in \mathbb{C}$.

Oss. $z \in \mathbb{C} \Rightarrow z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)\, i$.
$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2 \geqslant 0$.
$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$
$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
$\bar{\bar{z}} = z$.
Per $z \neq 0$ si ha $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$.
$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$.

Con una verifica diretta si dimostra che $\forall\, z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$
$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$
$$(\bar{z})^{-1} = \overline{(z^{-1})}$$

Si ha pertanto

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2 = |z_1|^2 |z_2|^2$$

da cui estraendo la radice quadrata

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|.$$

Esempio. $1 + 2i + 5 - 3i = 6 - i$

$(1 + 2i)(5 - 3i) = 5 - 3i + 10i - 6i^2 = 11 + 7i$

$\overline{1 + 2i} = 1 - 2i, \quad |1 - 2i| = \sqrt{5}$

$\mathrm{Re}(1 - 2i) = 1$, $\mathrm{Im}(1 - 2i) = -2$

$(1 - 2i)^{-1} = \dfrac{1 + 2i}{|1 - 2i|^2} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{5} i$.

$|i| = 1$

$\bar{\imath} = -i, \quad i^{-1} = -i,$

$i^3 = i^2 i = -i, \quad i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1.$