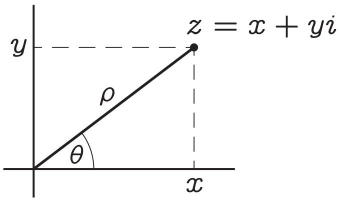
Forma polare di un numero complesso

Dato $z = x + yi \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, con $x, y \in \mathbb{R}$, poniamo

$$\rho := |z|, \qquad \arg z = \theta := \begin{cases} \arccos \dfrac{x}{|z|}, & \text{se } y \geq 0 \\ -\arccos \dfrac{x}{|z|}, & \text{se } y < 0 \end{cases}$$



Quindi ρ è il modulo di z cioè la distanza tra z e 0, mentre θ si chiama *argomento o anomalia* di z. L'argomento è definito soltanto a meno di multipli interi di 2π e in genere scegliamo il *valore principale*

$$\arg z \in \,]-\pi, \pi] \quad \text{oppure} \quad \arg z \in [0, 2\pi[.$$

Si ha

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$$

Quindi $z \in \mathbb{C}$ si può rappresentare in *forma polare* (o *trigonometrica*)

$$z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$$

con $\rho = |z| \geqslant 0$ e $\theta = \arg z$ (estendiamo la forma polare anche a $z = 0$ lasciando l'argomento indefinito).

Se $\operatorname{Im} z = y = 0$ allora $z = x$ è un numero reale e si ha

$$|z| = |x|, \qquad \arg z = \begin{cases} 0 & \text{se } x > 0 \\ \pi & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Se $\operatorname{Re} z = x = 0$ allora $z = yi$ è un numero immaginario e si ha

$$|z| = |y|, \qquad \arg z = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{se } y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

Se $\operatorname{Re} z = x \neq 0$ si ha anche

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x} & \text{se } x > 0 \\ \arctan \dfrac{y}{x} + \pi & \text{se } x < 0 \text{ e } y \geqslant 0 \\ \arctan \dfrac{y}{x} - \pi & \text{se } x < 0 \text{ e } y < 0. \end{cases}$$

Esempio. $z = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} i$, $|z| = 1$, $\arg z = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\pi}{4}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i = \cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}.$$

$w = 1 - \sqrt{3}\, i$, $|w| = 2$, $\arg z = -\arccos\dfrac{1}{2} = -\dfrac{\pi}{3}$

$$1 - \sqrt{3}\, i = 2\Big(\cos\Big(-\frac{\pi}{3}\Big) + i \sin\Big(-\frac{\pi}{3}\Big)\Big)\,.$$

Uguaglianza. Dati due numeri complessi in forma polare

$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$$
$$z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$$

$$z_1 = z_2 \iff \rho_1 = \rho_2 \text{ e } \exists\, k \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } \theta_1 - \theta_2 = 2k\pi.$$

La forma polare non è utile per fare l'addizione ma risulta molto utile per fare la moltiplicazione e le potenze (e, come vedremo, anche le radici).

Prodotti. Dati due numeri complessi in forma polare

$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$$
$$z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1\rho_2\big(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\big) = \\ &= \rho_1\rho_2\big(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\big). \end{aligned}$$

In altre parole nel prodotto si moltiplicano i moduli e si sommano gli argomenti. Posto

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \neq 0,$$

si ha anche

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \rho^{-1}(\cos\theta - i\sin\theta) = \\ &= \rho^{-1}\big(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\big) \end{aligned}$$

cioè l'inverso si calcola invertendo il modulo e cambiando segno all'argomento. Si ha quindi

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\big(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\big).$$

Esempio.

$$\begin{aligned} 3\Big(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\Big)\, 5\Big(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\Big) &= 15\Big(\cos\Big(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\Big) + i\sin\Big(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\Big)\Big) \\ &= 15\Big(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\Big) \\ &= 15i. \end{aligned}$$

Potenze. Iterando il ragionamento si ottengono formule per le potenze con esponente intero, per $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \neq 0$ e $n \in \mathbb{Z}$:

$$z^n = \rho^n\big(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\big).$$

Esempio.

$$(1 - \sqrt{3}\, i)^3 = 2^3\Big(\cos\Big(-\frac{3\pi}{3}\Big) + i\sin\Big(-\frac{3\pi}{3}\Big)\Big) = -8.$$

Radici di un numero complesso

Caso reale.

Def. Dato $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, la *radice n-esima* di numero reale $\rho \geqslant 0$ è l'*unico* numero reale $u \geqslant 0$ t.c. $u^n = \rho$. Si scrive $u = \sqrt[n]{\rho}$, o anche $\sqrt{\rho}$ per $n = 2$.

Quindi, ad es., si ha $\sqrt{4} = 2$, ma non è corretto scrivere $\sqrt{4} = -2$ e nemmeno $\sqrt{4} = \pm 2$.

Caso complesso. Dato $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \in \mathbb{C}$ e dato $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, vogliamo trovare tutte le *radici n-esime complesse* di z, cioè i numeri complessi $w \in \mathbb{C}$ t.c.

$$w^n = z.$$

Se $z = 0$ allora evidentemente $w = 0$ è l'unica radice n-esima di 0. Se $z \neq 0$, determiniamo tutte le radici in forma polare

$$w = r(\cos\psi + i\sin\psi)$$

$$w^n = r^n\big(\cos(n\psi) + i\sin(n\psi)\big) \iff$$

$$r^n = \rho, \quad n\psi = \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \iff$$

$$r = \sqrt[n]{\rho}, \quad \psi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Quindi il modulo di w è la radice n-esima del modulo di z mentre $\arg w$ assume più valori $\psi_0, \psi_1 \dots, \psi_{n-1}$ in corrispondenza di $k = 0, 1, \dots, n-1$ (risp.). Tuttavia $\psi_n = \psi_0 + 2\pi$, e così di seguito i valori successivi si ripetono a meno di multipli interi di 2π. Si ha quindi che le radici n-esime di $z \neq 0$ sono esattamente n:

$$\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)\\
w_1 &= \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2\pi}{n}\right)\\
&\ \vdots\\
w_k &= \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\\
&\ \vdots\\
w_{n-1} &= \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right).
\end{aligned}$$

Hanno lo stesso modulo $\sqrt[n]{\rho}$ e due argomenti consecutivi differiscono di

$$\psi_{k+1} - \psi_k = \frac{2\pi}{n}$$

valore indipendente da k. Pertanto le radici n-esime di $z \neq 0$ sono i vertici di un n-gono regolare di raggio $\sqrt[n]{\rho}$ e si trovano sulla circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{\rho}$.

Radici dell'unità. Definiamo

$$S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

come l'insieme dei punti $z = x + yi \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ t.c. $|z|^2 = x^2 + y^2 = 1$. In altre parole S^1 è la circonferenza unitaria del piano con centro l'origine.

Oss. $z \in S^1 \Rightarrow z^{-1} = \bar{z} \in S^1$. Infatti $|z|^2 = z\bar{z} = 1$.
Ogni punto $z \in S^1$ si può scrivere come

$$z = \cos\theta + i\sin\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Le radici n-esime di 1 sono date dalle formule precedenti per $\rho = 1$ e $\theta = 0$:

$$\begin{aligned} w_0 &= 1 \\ w_1 &= \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} \\ &\vdots \\ w_k &= \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \\ &\vdots \\ w_{n-1} &= \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}. \end{aligned}$$

Quindi $w_k \in S^1$ per $k = 0, 1, \dots, n-1$. Eseguiamo alcuni calcoli.

$\boxed{n=2}$ $w_0 = 1$, $w_1 = -1$.

$\boxed{n=3}$ $w_0 = 1$, $w_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$,
$w_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \bar{w}_1 = w_1^{-1}$.
Vertici di un triangolo equilatero.

$\boxed{n=4}$ $w_0 = 1$, $w_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$, $w_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$,
$w_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i = \bar{w}_1 = w_1^{-1}$.
Vertici di un quadrato.

Oss. 1 è radice n-esima di 1.
w_k radice n-esima di 1 $\Rightarrow w_k^{-1}$ radice n-esima di 1. Infatti

$$\left(w_k^{-1}\right)^n = (w_k^n)^{-1} = 1.$$

w_j, w_k radici n-esime di 1 $\Rightarrow w_j w_k$ radice n-esima di 1. Infatti

$$(w_j w_k)^n = w_j^n w_k^n = 1.$$

Quindi l'insieme delle radici n-esime di 1 ha n elementi ed è chiuso rispetto a moltiplicazione e inversione. Si dice che forma un *gruppo*.

Oss. Per le radici n-esime di 1 si ha

$$w_k = w_1^k.$$

Cioè il gruppo delle radici n-esime di 1 è *ciclico*, ovvero è generato da un elemento. Le radici n-esime di 1 che generano tutte le radici n-esime mediante potenze (come w_1) sono dette *radici n-esime primitive* di 1.Si può dimostrare che w_k è una radice n-esima primitiva di 1 $\Leftrightarrow$ MCD$(k, n) = 1$. In particolare se n è *primo* tutte le radici n-esime di 1 tranne 1 sono primitive.