Polinomi

Un *polinomio in una indeterminata* è un'*espressione formale* del tipo

$$f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

dove $n \in \mathbb{N}$ e $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sono numeri reali (*polinomio reale*) oppure complessi (*polinomio complesso*). La lettera x è detta *indeterminata* o *variabile*. I numeri $a_0, \ldots, a_n$ sono detti *coefficienti* e a_0 è detto *termine noto*. Se x non compare allora f è detto *polinomio costante* e in particolare si ha il *polinomio nullo* 0. Il numero n è detto *grado* di f se $a_n \neq 0$, indicato $n = \deg(f)$. Per definizione poniamo $\deg(0) = -\infty$. Quindi $\deg(a) = 0$ se a è un polinomio costante non nullo (i polinomi costanti sono numeri).

Due polinomi

$$f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$
$$g = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m$$

sono *uguali* se $n = m$ e $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$ (cioè se hanno uguale il grado e i coefficienti corrispondenti).

L'insieme dei polinomi reali o complessi nell'indeterminata x si indica rispettivamente con $\mathbb{R}[x]$ oppure $\mathbb{C}[x]$ e si ha

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{R}[x], \ \ \mathbb{C} \subset \mathbb{C}[x] \text{ e } \mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x].$$

I polinomi si possono sommare, moltiplicare per scalari e moltiplicare tra loro (diamo per scontate queste operazioni)

$$\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$$
$$\deg(f + g) \leqslant \max(\deg(f), \deg(g)).$$

Poniamo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ a seconda del campo che vogliamo considerare.

Funzioni polinomiali. Dato $f \in \mathbb{K}[x]$ possiamo associare la corrispondente *funzione polinomiale*

$$f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$$

che ad ogni $u \in \mathbb{K}$ associa $f(u)$, ottenuto mettendo u al posto di x.

Divisione. Si può sempre fare la *divisione* tra polinomi: dati $f, g \in \mathbb{K}[x]$, con $g \neq 0$, esistono unici $q, r \in \mathbb{K}[x]$ t.c.

$$f = gq + r \quad \text{e} \quad \deg r < \deg g.$$

I polinomi q e r sono detti risp. *quoziente* e *resto* della divisione di f (*dividendo*) per g (*divisore*). Se $r = 0$ diciamo che f è *divisibile* per g e si ha $f = gq$. L'algoritmo della divisione viene dato per scontato. Si raccomanda di ripassare questo algoritmo che è stato trattato alle superiori, inclusa la Regola di Ruffini.