Spazi vettoriali numerici complessi

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, in analogia con $\mathbb{R}^n$, possiamo definire

$$\mathbb{C}^n \overset{\text{def}}{=} \underbrace{\mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}}_{n \text{ volte}} = \{(z_1, \ldots, z_n) \mid z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}\}.$$

Per definizione poniamo anche $\mathbb{C}^0 = \mathbb{R}^0 \overset{\text{def}}{=} \{0\}$. Si ha $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$. Gli elementi di $\mathbb{C}^n$ sono chiamati vettori (complessi), e li scriveremo come vettori riga o vettori colonna a seconda della convenienza del momento.

Su $\mathbb{C}^n$ definiamo l'addizione componente per componente e la moltiplicazione per scalari complessi, analogamente al caso reale:

$$(w_1, \ldots, w_n) + (z_1, \ldots, z_n) \overset{\text{def}}{=} (w_1 + z_1, \ldots, w_n + z_n)$$

$$\alpha(z_1, \ldots, z_n) \overset{\text{def}}{=} (\alpha z_1, \ldots, \alpha z_n)$$

$\forall\, (w_1, \ldots, w_n), (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{C}$.

Def. $\mathbb{C}^n$ con queste operazioni di addizione e moltiplicazione scalare è detto *spazio vettoriale numerico complesso di dimensione* n.

L'addizione è associativa e commutativa dato che queste proprietà valgono su $\mathbb{C}$ e inoltre il *vettore nullo*

$$0_{\mathbb{C}^n} \overset{\text{def}}{=} (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n \text{ volte}})$$

è elemento neutro per l'addizione (spesso lo indicheremo con 0).

$\forall\, (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ definiamo il *vettore opposto* come

$$-(z_1, \ldots, z_n) \overset{\text{def}}{=} (-z_1, \ldots, -z_n)$$

e si ha

$$(z_1, \ldots, z_n) - (z_1, \ldots, z_n) = 0_{\mathbb{C}^n}.$$

Matrici

Def. Dati due numeri positivi $m, n \in \mathbb{N}$, una *matrice* di tipo $m \times n$ è una tabella di numeri reali o complessi con m righe e n colonne. Se $m = n$ la matrice è detta *quadrata*. I numeri che formano la matrice sono detti *entrate* o *elementi*.

Una matrice quadrata $n \times n$ è detta anche matrice quadrata di ordine n.

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

è una matrice 2×3.

L'insieme delle matrici $m \times n$ a entrate reali si indica con $M_{m,n}(\mathbb{R})$ o anche $\mathbb{R}^{m\times n}$. Analogamente l'insieme delle matrici $m \times n$ a entrate complesse si indica con $M_{m,n}(\mathbb{C})$ o anche $\mathbb{C}^{m\times n}$. L'insieme delle matrici quadrate di ordine n si indica con $M_n(\mathbb{R}) = M_{n,n}(\mathbb{R})$ e similmente per quelle complesse $M_n(\mathbb{C}) = M_{n,n}(\mathbb{C})$. Si ha $M_{m,n}(\mathbb{R}) \subset M_{m,n}(\mathbb{C})$.

Esempio.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -1+3i & -1+7i \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}).$$

Le entrate di una matrice $m \times n$ si numerano a partire da quella più in alto a sinistra, mediante una coppia di indici (i, j) con $i \in \{1, \dots, m\}$ (indice di riga) e $j \in \{1, \dots, n\}$ (indice di colonna). Quindi i numera le righe dall'alto verso il basso, e j numera le colonne da sinistra verso destra. Indichiamo l'entrata di posto (i, j) di una matrice A con A_{ij}.

Esempio. Per la matrice A del primo esempio si ha $A_{11} = 3$, $A_{13} = -5$, $A_{21} = 0$, $A_{23} = 4$.

Una matrice A di tipo $m \times n$ la cui generica entrata sia un numero a_{ij} si indica con $A = (a_{ij})$, ossia $A_{ij} = a_{ij}$.

Addizione. Nel seguito indicheremo con $\mathbb{K}$ uno dei campi $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.
Date $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ definiamo la *somma* $A + B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ ponendo

$$(A+B)_{ij} \overset{\text{def}}{=} A_{ij} + B_{ij}$$

ossia si sommano le entrate corrispondenti di A e B.

Moltiplicazione scalare. Dati $\alpha \in \mathbb{K}$ e $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ definiamo la *moltiplicazione scalare* $\alpha A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ ponendo

$$(\alpha A)_{ij} \overset{\text{def}}{=} \alpha A_{ij}$$

ossia si moltiplicano le entrate di A per il numero α.

Prodotto righe per colonne

Abbiamo visto la definizione di matrice e le operazioni di somma e moltiplicazione scalare. Vedremo oggi una ulteriore operazione, prima in un caso speciale e poi in generale. Il campo sarà $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, che come sempre indicheremo con $\mathbb{K}$ (le cose che vedremo valgono su qualunque campo). L'insieme delle matrici $m \times n$, ovvero con m righe e n colonne, a entrate nel campo $\mathbb{K}$, è stato indicato con $M_{m,n}(\mathbb{K})$.

Def. Dati un vettore riga e un vettore colonna con n componenti

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in M_{1,n}(\mathbb{K}) \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K})$$

chiamiamo *prodotto di A per B* lo scalare

$$AB \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \in \mathbb{K}.$$

Esempio.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = -5 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2i \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - i.$$

Data $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ indichiamo con $A^{(i)} \in M_{1,n}(\mathbb{K})$ la i-esima riga di A, con $A_{(j)} \in M_{m,1}(\mathbb{K})$ la j-esima colonna di A e con $A_{ij} \in \mathbb{K}$ l'entrata di posto (i, j) di A, per $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; A_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \; A_{32} = 7.$$

Generalizziamo l'operazione di moltiplicazione vista sopra.

Def. Consideriamo due matrici $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ e $B \in M_{n,\ell}(\mathbb{K})$. Il *prodotto righe per colonne di A per B*, è la matrice $AB \in M_{m,\ell}(\mathbb{K})$ avente come entrata di posto (i, j)

$$(AB)_{ij} \overset{\text{def}}{=} A^{(i)} B_{(j)} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$$

$\forall\, i = 1, \ldots, m$, $\forall\, j = 1, \ldots, \ell$.

Oss. Il prodotto righe per colonne è definito solo se il numero di colonne della prima matrice è uguale al numero di righe della seconda.

Oss. Se A è di tipo $m \times n$ e B è di tipo $n \times \ell$ allora AB è di tipo $m \times \ell$.

Oss. Due matrici quadrate $n \times n$ sono moltiplicabili e il risultato è una matrice quadrata $n \times n$.

Esempio.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Oss. Una matrice $m \times n$ è moltiplicabile per un vettore colonna a n componenti. Il risultato è un vettore colonna a m componenti.

Oss. Un vettore riga a m componenti è moltiplicabile per una matrice $m \times n$. Il risultato è un vettore riga a n componenti.

Oss. Il prodotto righe per colonne in generale non è commutativo, nemmeno per matrici quadrate $n \times n$, con $n \geqslant 2$.

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB \neq BA.$$

Proprietà delle matrici

Abbiamo visto le seguenti operazioni sulle matrici: somma, moltiplicazione scalare, prodotto righe per colonne.

La somma di matrici è associativa, commutativa e ha l'elemento neutro, la *matrice nulla* $0 \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ le cui entrate sono tutte nulle. Ogni matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ ha la *matrice opposta* $-A$ le cui entrate sono gli opposti delle entrate di A, e soddisfa $A - A = 0$. Queste proprietà sono di verifica molto semplice e simile al caso già visto per i vettori di $\mathbb{R}^n$.

Il prodotto righe per colonne abbiamo visto che non è commutativo (non solo, se AB è definito non è detto che lo sia anche BA).

Prop. *Il prodotto righe per colonne, quando è definito, è associativo e distributivo rispetto alla somma, ovvero per tutte le matrici A, B, C per cui le operazioni indicate abbiano senso si ha*

$$A(BC) = (AB)C$$
$$A(B + C) = AB + AC$$
$$(A + B)C = AC + BC.$$

Dim. Dimostriamo la proprietà associativa. Consideriamo tre matrici

$$A \in M_{m,n}(\mathbb{K}), \;\; B \in M_{n,\ell}(\mathbb{K}), \;\; C \in M_{\ell,r}(\mathbb{K}).$$

Possiamo fare i prodotti AB, BC, $A(BC)$, $(AB)C$. Vogliamo dimostrare

$$A(BC) = (AB)C.$$

Due matrici sono uguali $\Leftrightarrow$ sono dello stesso tipo e hanno uguali le entrate corrispondenti. $A(BC)$ è di tipo $m \times r$, come $(AB)C$. Mostriamo che queste due matrici hanno uguali le entrate corrispondenti.

$$\big(A(BC)\big)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(BC)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\left(\sum_{h=1}^{\ell} B_{kh}C_{hj}\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{\ell} A_{ik}B_{kh}C_{hj}$$

$$\big((AB)C\big)_{ij} = \sum_{h=1}^{\ell} (AB)_{ih}C_{hj} = \sum_{h=1}^{\ell}\left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kh}\right)C_{hj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{\ell} A_{ik}B_{kh}C_{hj}$$

$$\Rightarrow\ \big(A(BC)\big)_{ij} = \big((AB)C\big)_{ij} \quad \forall\, i = 1, \dots m,\ \forall\, j = 1, \dots, r.$$

La proprietà distributiva si dimostra con un calcolo analogo, lasciato come esercizio volontario (non è necessario conoscerlo). □

Matrice trasposta.

Def. Data $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ chiamiamo *trasposta* di A la matrice ${}^tA \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ ottenuta da A scambiando le righe con le colonne, ovvero t.c.

$$({}^tA)_{ij} := A_{ji} \qquad \forall\, i = 1, \dots, n,\ \forall\, j = 1, \dots, m.$$

Oss. $A \in M_n(\mathbb{K}) \Rightarrow {}^tA \in M_n(\mathbb{K})$.
${}^t({}^tA) = A$.

Prop. ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$, $\forall\, A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$.

La dimostrazione segue subito dalle definizioni di somma e di trasposta.

Prop. ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$, $\forall\, A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $\forall\, B \in M_{n,\ell}(\mathbb{K})$.

Dim. ${}^t(AB)$ e ${}^tB\,{}^tA$ sono di tipo $\ell \times m$.

$$\big({}^t(AB)\big)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}B_{ki}$$

$$\big({}^tB\,{}^tA\big)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} ({}^tB)_{ik}({}^tA)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} B_{ki}A_{jk}$$

$$\Rightarrow\ \big({}^t(AB)\big)_{ij} = \big({}^tB\,{}^tA\big)_{ij} \qquad \forall\, i = 1, \dots, \ell,\ \forall\, j = 1, \dots, m.$$

□