

## Matrici diagonali

**Def.** Data una matrice quadrata  $A \in M_n(\mathbb{K})$  chiamiamo *diagonale principale* il vettore

$$(A_{11}, A_{22}, \dots, A_{nn}) \in \mathbb{K}^n.$$

**Def.** Una matrice quadrata  $D \in M_n(\mathbb{K})$  è *diagonale* se  $D_{ij} = 0 \forall i \neq j$ .

**Oss.**  $D$  è una matrice diagonale se le entrate fuori dalla diagonale principale sono nulle.

**Def.** Dati  $n \in \mathbb{N}$  e  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ , indichiamo con

$$\text{diag}(a_1, \dots, a_n) \in M_n(\mathbb{K})$$

la matrice diagonale avente  $(a_1, \dots, a_n)$  come diagonale principale, ossia

$$\text{diag}(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

**Matrice identica.** Per ogni intero  $n \geq 1$  consideriamo la *matrice identica* (o *matrice identità*) di ordine  $n$

$$I_n := \text{diag}(1, 1, \dots, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

avente 1 sulla diagonale principale e 0 altrove.

**Def.** Per ogni  $i, j \in \mathbb{N}$  poniamo

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (\text{Delta di Kronecker}).$$

**Esempio.**  $\delta_{11} = 1$ ,  $\delta_{12} = 0$ ,  $\delta_{33} = 1$ ,  $\delta_{41} = 0$ .

**Oss.**  $\delta_{ij}$  sono le entrate della matrice identica, ovvero  $(I_n)_{ij} = \delta_{ij}$ .

**Prop.** Sia  $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ . Allora

$$A I_n = I_m A = A.$$

*In altre parole la matrice identica è elemento neutro per il prodotto righe per colonne.*

*Dim.* Dimostriamo  $A I_n = A$ .

$$(A I_n)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} \delta_{kj} = A_{ij} \delta_{jj} = A_{ij}$$

dato che per  $k \neq j$ ,  $\delta_{kj} = 0$ , mentre  $\delta_{jj} = 1$ .

La dimostrazione di  $I_m A = A$  è simile. □

## Matrici invertibili

**Def.** Sia  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Diciamo che  $A$  è *invertibile* se esiste una matrice  $B \in M_n(\mathbb{K})$  t.c.

$$AB = BA = I_n.$$

In questo caso scriviamo  $A^{-1} := B$  e chiamiamo  $A^{-1}$  l'*inversa* di  $A$ .

Se  $A$  è invertibile si ha quindi  $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ .

**Oss.** L'inversa se esiste è unica. Infatti se  $B, B' \in M_n(\mathbb{K})$  sono inverse di  $A$ , si ha

$$B = BI_n = B(AB') = (BA)B' = I_n B' = B'.$$

La matrice nulla  $0$  chiaramente non è invertibile dato che  $0B = 0$ .

**Oss.**  $I_n^{-1} = I_n$ .

**Esempio.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

non è invertibile, infatti se

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

fosse l'inversa di  $A$  si avrebbe

$$AB = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che è impossibile.

Pertanto esistono matrici quadrate non nulle non invertibili.

**Esempio.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è invertibile e si può determinare l'inversa

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

risolvendo un sistema di equazioni

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + 2t = 0 \\ x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} z = \frac{1}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \\ x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

In seguito capiremo esattamente quali matrici quadrate sono invertibili e vedremo metodi più efficienti per determinare l'inversa.