Sistemi lineari

Continuiamo ad indicare con $\mathbb{K}$ uno dei campi $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Def. Un'espressione del tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

è detta *equazione lineare* nelle incognite $x_1, \ldots, x_n$, dove $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ sono i *coefficienti*, $b \in \mathbb{K}$ è il *termine noto* e $n \in \mathbb{N}$.

Un *sistema lineare* di m equazioni in n incognite $x_1, \ldots, x_n$ è un insieme di m equazioni lineari

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \cdots + \ a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ a_{22}x_2 + \cdots + \ a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Oss. I coefficienti a_{ij} hanno due indici: i per l'equazione e j per l'incognita. Un'equazione lineare è un caso particolare di sistema lineare con $m = 1$.

Forma matriciale. *Matrice dei coefficienti del sistema S*

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{K}).$$

Vettore dei termini noti

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m.$$

Vettore delle incognite

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

N.B. Le incognite sono simboli, non numeri.

Svolgendo il prodotto righe per colonne si ha:

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

e quindi il sistema S può essere scritto nell'importante *forma matriciale*

$$S: AX = B.$$

Si osservi che $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ fornisce i coefficienti del sistema, il numero m di equazioni (numero di righe) e il numero n di incognite (numero di colonne). Il vettore B dei termini noti deve avere m componenti.

Soluzioni. Si chiama *soluzione* del sistema S un vettore

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

t.c.

$$AU = B,$$

ovvero le equazioni del sistema diventano identità sostituendo U al posto di X. Una soluzione ha tante componenti quante sono le incognite.

Un sistema lineare è *compatibile* se ammette almeno una soluzione, *incompatibile* o *impossibile* in caso contrario.

Esempio. $2x = 0$ è compatibile avendo la soluzione $x = 0$.

$\begin{cases} 2x = 3 \\ 2x = 4 \end{cases}$ è incompatibile (non ammette soluzioni).

Spazio delle soluzioni. Si chiama *spazio delle soluzioni* del sistema $S : AX = B$ l'insieme Σ_S di tutte le soluzioni di S, ovvero

$$\Sigma_S \stackrel{\text{def}}{=} \{U \in \mathbb{K}^n \mid AU = B\} \subset \mathbb{K}^n.$$

Si ha pertanto $\Sigma_S \neq \emptyset \Leftrightarrow S$ è compatibile.
Se il sistema S è incompatibile si ha $\Sigma_S = \emptyset$.

Sistemi omogenei. Un sistema lineare è *omogeneo* se i termini noti sono tutti nulli, ovvero è del tipo

$$AX = 0_{\mathbb{K}^m}.$$

Un sistema omogeneo è sempre compatibile avendo la *soluzione nulla*

$$X = 0_{\mathbb{K}^n}.$$

N.B. Potrebbero esserci altre soluzioni oltre a quella nulla.

Oss. $AX = B$ omogeneo $\Leftrightarrow B = 0_{\mathbb{K}^m} \Leftrightarrow$ ammette la soluzione nulla.

Pivot. Data una matrice A si chiamano *pivot* le prime entrate non nulle delle righe (ammesso che ve ne siano). Una riga ha un pivot $\Leftrightarrow$ è non nulla, e la prima entrata non nulla su tale riga è il suo pivot.
Pertanto A_{ip} è il pivot della riga i-esima $\Leftrightarrow A_{ip} \neq 0$ e $A_{ij} = 0\ \forall j < p$.

Esempio.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

il pivot della prima riga è 3, quello della seconda è 5 mentre la terza non ha pivot essendo nulla.

Matrici a gradini. Una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ è *a gradini* o *a scala* se è nulla oppure se i suoi pivot sono $A_{1p_1}, A_{2p_2}, \ldots, A_{rp_r}$ con

$$p_1 < p_2 < \cdots < p_r,$$

mentre tutte le righe dopo la r-esima (se presenti) sono nulle. In altre parole A è a gradini se il pivot di ciascuna riga successiva alla prima è più a destra del pivot della riga precedente.

Oss. Il numero r di pivot di una matrice *a gradini* $m \times n$ non può eccedere il numero di righe e di colonne, ovvero $r \leqslant \min(m, n)$.

N.B. In inglese "matrice a gradini" si dice *"matrix in row echelon form"*.

Esempi. Le seguenti matrici sono a gradini.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Esempi. Le seguenti matrici non sono a gradini.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Sistemi a gradini. Un sistema lineare $AX = B$ è *a gradini* o *a scala* se la sua matrice A è a gradini.

Esempio. Il seguente sistema è a gradini

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ 5x_3 = 1 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Esempio. Il seguente sistema non è a gradini

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Sistemi equivalenti. Due sistemi $S\colon AX = B$ e $S'\colon A'X = B'$ nelle stesse incognite $x_1, \ldots, x_n$ sono *equivalenti* se sono entrambi compatibili e hanno le stesse soluzioni, oppure se sono entrambi incompatibili: $S \sim S'$. In altre parole $S \sim S' \Leftrightarrow \Sigma_S = \Sigma_{S'}$.

Risoluzione. Risolvere un sistema lineare significa capire se è compatibile e in caso affermativo trovarne tutte le soluzioni. Un sistema si prende in considerazione per essere risolto. Come vedremo, un sistema lineare compatibile reale o complesso ammette una oppure infinite soluzioni. Un sistema incompatibile non ne ammette nessuna.

In primo luogo capiremo come si risolvono i sistemi a gradini. In un secondo momento vedremo come trasformare un sistema lineare qualunque in un sistema equivalente a gradini, che sapremo risolvere.

Risoluzione di un sistema a gradini

Consideriamo un sistema lineare a gradini di m equazioni in n incognite

$$S : AX = B$$

$$A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K}), \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Per ipotesi A è una matrice a gradini.

Sistema incompatibile

Se A ha una riga nulla, diciamo la i-esima, ma $b_i \neq 0$ allora S è incompatibile, dato che la i-esima equazione sarebbe $0 = b_i$.

Esempio.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ \qquad\quad 0 = 3 \end{cases}$$

Sistema compatibile

Supponiamo ora che la situazione precedente non si presenti.

Soluzione unica. Tutte le incognite hanno un coefficiente pivot, quindi tutte le righe di A dopo la n-esima sono nulle e anche i corrispondenti termini noti sono nulli. Tali equazioni sono $0 = 0$ e possono essere eliminate.

L'ultima equazione sarà $a_{nn}x_n = b_n$ con $a_{nn} \neq 0$. Si trova subito

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}.$$

Sostituendo nella penultima equazione si trova x_{n-1} e così via procedendo a ritroso si trovano tutte le incognite e il sistema ha un'unica soluzione.

Esempio.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ \qquad\quad x_2 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Infinite soluzioni. Se ci sono incognite $x_{i_1}, \dots, x_{i_d}$ senza coefficiente pivot, a queste si assegnano *parametri liberi*

$$\begin{cases} x_{i_1} = t_1 \\ \dots\dots\dots \\ x_{i_d} = t_d \end{cases}$$

Le altre incognite $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$, aventi coefficiente pivot, si determinano a ritroso come nel caso precedente, partendo dall'ultima equazione.

Oss. $d = n - r$.

In definitiva tutte le incognite $x_1, \dots, x_n$ risulteranno espresse come polinomi costanti o di primo grado aventi i parametri liberi come variabili. La soluzione così espressa è detta *soluzione generale*. Ogni scelta dei parametri liberi $t_1 \dots, t_d \in \mathbb{K}$ determina una soluzione. Pertanto il sistema ammette infinite soluzioni.

Esempio.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 3t_1 + 2t_2 + 7 \\ x_2 = 2t_1 + 3 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \end{cases}$$

Metodo di eliminazione di Gauss

Questo metodo permette di trasformare una matrice in una matrice a gradini, in modo tale che i sistemi lineari corrispondenti siano equivalenti. Come vedremo permette di fare anche varie altre cose tra cui calcolare l'inversa di una matrice.

Operazioni elementari sulle righe di una matrice. Data $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ consideriamo i seguenti tre tipi di operazioni (con $i \neq j$).

Tipo I. Scambiare due righe di A.

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(j)} \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \vdots \\ A^{(j)} \\ \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Tipo II. Moltiplicare una riga di A per uno scalare $\alpha \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha A^{(i)} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Tipo III. Sommare ad una riga di A un multiplo di un'altra riga di A.

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(j)} \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{III}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(j)} + \alpha A^{(i)} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Per ciascuna operazione le altre righe non vengono modificate.

Oss. Le operazioni inverse sono operazioni elementari dello stesso tipo. Questo è evidente per le operazioni di tipo I e II. Per le operazioni di tipo III si riottiene la matrice originale sommando $-\alpha A^{(i)}$ alla riga j.

Algoritmo di Gauss. Supponiamo che $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ non sia a gradini.

Passo 1. Mediante un'operazione di tipo I (scambio di righe) mettiamo come prima riga una che abbia il pivot più a sinistra possibile (potrebbe già essere la prima riga). Supponiamo quindi che tale pivot sia $a_{1p} \neq 0$. Le colonne che precedono la p-esima, se presenti (cioè se $p > 1$), sono nulle.

Passo 2. Mediante operazioni di tipo III annulliamo tutti i pivot al di sotto del primo: se $a_{ip} \neq 0$ per $i > 1$, sostituiamo $A^{(i)}$ con

$$A^{(i)} - \frac{a_{ip}}{a_{1p}} A^{(1)}.$$

Passo 3. Tralasciamo (senza cancellare) la riga 1 e torniamo al Passo 1, iterando il procedimento sulle righe successive.

Al termine dell'algoritmo la matrice sarà a gradini.

Oss. Non abbiamo usato operazioni di tipo II ma queste possono comunque essere utili per eventuali semplificazioni.

Esempio.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \overset{I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \overset{III}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \overset{I}{\rightsquigarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -2 \end{pmatrix} \overset{II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$