Sistemi lineari arbitrari: metodo di Gauss

Consideriamo ora un sistema lineare qualunque in forma matriciale

$$S : AX = B$$

$$A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K}), \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Matrice completa. La *matrice completa* del sistema

$$\tilde{A} = (A \mid B) \in M_{m,n+1}(\mathbb{K})$$

si ottiene aggiungendo il vettore colonna dei termini noti alla matrice dei coefficienti. Le operazioni elementari sulle righe della matrice completa trasformano il sistema in un sistema *equivalente*. Infatti le operazioni inverse sono operazioni elementari dello stesso tipo, e a livello di sistema le operazioni elementari corrispondono alle seguenti.

Tipo I. Scambiare due equazioni di S.

Tipo II. Moltiplicare un'equazione di S per uno scalare $\alpha \neq 0$.

Tipo III. Sommare membro a membro un'equazione di S con un multiplo scalare di un'altra equazione di S.

Mediante operazioni elementari si trasforma il sistema S in un sistema S' e ciascuno è conseguenza dell'altro. Dunque hanno le stesse soluzioni.

Risoluzione di un sistema lineare. Si applica l'algoritmo di Gauss alla matrice completa del sistema per trasformarla in una matrice a gradini che rappresenta un sistema lineare a gradini equivalente a quello di partenza. Il sistema a gradini si risolve col metodo già studiato.

Esempio.

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 1 \\ 2x - y - z = -1 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \overset{III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & 7 & -3 \end{array}\right)$$

Sistema compatibile, z non ha coefficiente pivot $\rightsquigarrow$ un parametro libero.

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 1 \\ \quad -5y + 7z = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{6}{5}t - \dfrac{1}{5} \\ y = \dfrac{7}{5}t + \dfrac{3}{5} \\ z = t \end{cases}$$

Le operazioni elementari trasformano un sistema omogeneo in un altro sistema omogeneo, quindi i termini noti se all'inizio sono *tutti* nulli, rimangono nulli. Per questa ragione, nel caso dei sistemi omogenei, possiamo operare sulla matrice dei coefficienti anziché sulla matrice completa.

Esempio. Risolviamo un sistema omogeneo.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + \phantom{x_2 - {}} 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ \phantom{2x_1 + {}} x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \overset{III}{\rightsquigarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & -1 \end{pmatrix} \overset{III}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \phantom{x_1 + x_2 + {}} 10x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{8}{5}t \\ x_2 = -\dfrac{9}{10}t \\ x_3 = -\dfrac{1}{10}t \\ x_4 = t \end{cases}$$

Sistemi con infinite soluzioni

Prop. *Ogni sistema lineare compatibile con più incognite che equazioni ammette infinite soluzioni.*

Dim. L'algoritmo di Gauss non fa aumentare il numero di equazioni, mentre le incognite rimangono le stesse. Il sistema a gradini che si ottiene con Gauss sarà quindi compatibile perché equivalente a quello di partenza e avrà più incognite che equazioni. Pertanto c'è almeno un'incognita senza coefficiente pivot. Nella soluzione generale ci sarà almeno un parametro libero che assumendo infiniti valori determina infinite soluzioni. □

Dato che i sistemi omogenei sono sempre compatibili avendo almeno la soluzione nulla, si ottiene il seguente corollario.

Cor. *Ogni sistema lineare omogeneo con più incognite che equazioni ammette infinite soluzioni.*

Sistemi dipendenti da parametri

Spesso occorre risolvere sistemi che dipendono da uno o più *parametri*. I parametri del sistema non vanno confusi né con le incognite, né con i parametri liberi, coi quali non c'entrano niente, e devono essere indicati con lettere diverse. Cambiando i parametri del sistema, cambia il sistema e quindi le soluzioni. Per contro, cambiando soltanto i parametri liberi (se presenti) si ottengono diverse soluzioni dello stesso sistema.

Esempio. Nel seguente sistema lineare k è un parametro del sistema. Vogliamo trovare tutte le soluzioni del sistema al variare di $k \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} kx + \ \ y - 2z = 0 \\ x + 2y - kz = k \\ y + \ \ z = k \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -k & k \\ 0 & 1 & 1 & k \end{array}\right) \overset{I}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -k & k \\ 0 & 1 & 1 & k \\ k & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \overset{III}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -k & k \\ 0 & 1 & 1 & k \\ 0 & -2k+1 & k^2-2 & -k^2 \end{array}\right) \overset{III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -k & k \\ 0 & 1 & 1 & k \\ 0 & 0 & k^2+2k-3 & k^2-k \end{array}\right)$$

$k^2 + 2k - 3 = (k+3)(k-1)$ è pivot $\Leftrightarrow k \neq -3, 1$.
Si studiano quindi tre casi separatamente: $k = -3$, $k = 1$, $k \neq -3, 1$.

$\underline{k = -3}$ Sistema incompatibile.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right)$$

$\underline{k = 1}$ Sistema compatibile con infinite soluzioni, un parametro libero.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$$

$\underline{k \neq -3, 1}$ Sistema compatibile con un'unica soluzione.
Nell'ultima riga semplifichiamo $k - 1 \neq 0$, dato che $k^2 - k = k(k-1)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -k & k \\ 0 & 1 & 1 & k \\ 0 & 0 & k+3 & k \end{array}\right) \quad \begin{cases} x + 2y - kz = k \\ y + z = k \\ (k+3)z = k \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{k}{k+3} \\ y = \dfrac{k(k+2)}{k+3} \\ z = \dfrac{k}{k+3} \end{cases}$$