# Spazi vettoriali

Indichiamo con $\mathbb{K}$ uno dei campi $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ (oppure un campo qualsiasi).

**Def** (Assiomi di spazio vettoriale)**.** Un $\mathbb{K}$-*spazio vettoriale* è un insieme *non vuoto* $V$ dove sono date due funzioni dette *operazioni*

$$+ : V \times V \to V \qquad\qquad \cdot : \mathbb{K} \times V \to V$$
$$(v, w) \mapsto v + w \qquad\qquad (\alpha, v) \mapsto \alpha v$$

dette rispettivamente *addizione* e *moltiplicazione (per uno) scalare*, che soddisfano i seguenti assiomi $\forall\, u, v, w \in V$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

| | | |
|---|---|---|
| *1*) | $(u + v) + w = u + (v + w)$ | *Proprietà associativa per l'addizione* |
| *2*) | $\exists\, 0_V \in V$ t.c. $v + 0_V = v$ | *Vettore nullo* |
| *3*) | $\exists\, -v \in V$ t.c. $v - v = 0_V$ | *Vettore opposto* |
| *4*) | $u + v = v + u$ | *Proprietà commutativa per l'addizione* |
| *5*) | $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ | *Proprietà distributiva vettoriale* |
| *6*) | $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ | *Proprietà distributiva scalare* |
| *7*) | $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$ | *Proprietà associativa scalare* |
| *8*) | $1v = v$ | *Elemento neutro moltiplicativo* |

Gli elementi di $V$ sono detti *vettori* e gli elementi di $\mathbb{K}$ sono detti *scalari*.

Un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale è detto anche *spazio vettoriale su* $\mathbb{K}$. Se consideriamo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (risp. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) diciamo anche spazio vettoriale reale (risp. complesso). Scriviamo anche $0$ anziché $0_V$ senza confonderlo con $0 \in \mathbb{K}$.

**Esempio.** I seguenti sono $\mathbb{K}$-spazi vettoriali con le operazioni di addizione e moltiplicazione scalare definite in precedenza. La validità degli assiomi segue subito dalle proprietà dei campi e dei polinomi.
$\mathbb{K}^n$ (ossia $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$) $\mathbb{K}$-spazio vettoriale numerico di dimensione $n$.
$M_{m,n}(\mathbb{K})$ spazio delle matrici $m \times n$ a entrate in $\mathbb{K}$.
$M_n(\mathbb{K})$ spazio delle matrici quadrate di ordine $n$ a entrate in $\mathbb{K}$.
$\mathbb{K}[x]$ spazio dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{K}$.

**Oss.** Per gli assiomi (*1*) e (*4*) possiamo scrivere

$$v_1 + \cdots + v_n$$

senza parentesi e in un ordine qualsiasi $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, v_1, \ldots, v_n \in V$.

**Prop.** *Per qualunque spazio vettoriale $V$ valgono le seguenti proprietà, $\forall\, u, v, w \in V$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{K}$.*

*a)* *Il vettore nullo $0_V$ è unico.*

*b)* $u + w = v + w \Rightarrow u = v$ *(legge di cancellazione).*

*c)* $0v = 0_V$.

*d)* $\alpha 0_V = 0_V$.

*e)* $\alpha v = 0_V \Leftrightarrow \alpha = 0$ *oppure* $v = 0_V$.

*f)* *L'opposto $-v$ è unico.*

*g)* $-v = (-1)v$.

*Dim.*

*a)* Supponiamo $0'_V \in V$ altro vettore nullo: $0_V = 0_V + 0'_V = 0'_V$.

*b)* Basta sommare a entrambi i membri $-w$.

*c)* $0v = (0 + 0)v = 0v + 0v \Rightarrow 0_V = 0v$.

*d)* $\alpha 0_V = \alpha(0 0_V) = (\alpha 0)0_V = 0 0_V = 0_V$.

*e)* $\alpha v = 0_V$ e $\alpha \neq 0 \Rightarrow 0_V = \alpha^{-1} 0_V = \alpha^{-1}(\alpha v) = (\alpha^{-1}\alpha)v = 1v = v$.

*f)* $v' \in V$ altro opposto di $v \Rightarrow v + v' = 0_V = v - v \Rightarrow v' = -v$ per (*b*).

*g)* $0_V = 0v = (1 + (-1))v = 1v + (-1)v = v + (-1)v$. $\square$

**Combinazioni lineari.** Consideriamo un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale $V$, vettori $v_1, \dots, v_n \in V$ e scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, con $n \in \mathbb{N}$. Il vettore

$$u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in V$$

è detto *combinazione lineare* di $v_1, \dots, v_n$ con *coefficienti* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Scriveremo anche

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i.$$

Una combinazione lineare è *nulla* se ha come risultato il vettore nullo:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0_V.$$

Una combinazione lineare è *banale* se tutti i coefficienti sono nulli. Una combinazione lineare banale è nulla ma il viceversa non è sempre vero.

**Esempio.** Combinazione lineare nulla non banale in $\mathbb{R}^2$

$$2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

**Dipendenza lineare.** I vettori $v_1, \dots, v_n \in V$ sono *linearmente dipendenti* se esiste una loro combinazione lineare nulla non banale, ossia se esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ non tutti nulli t.c.

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0_V.$$

**Indipendenza lineare.** I vettori $v_1, \ldots, v_n \in V$ sono *linearmente indipendenti* se ammettono un'unica combinazione lineare nulla, ossia quella banale. In altri termini $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti se e solo se $\forall\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ si ha:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_V \;\;\Rightarrow\;\; \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Questa è l'implicazione che va dimostrata per far vedere che i vettori dati sono linearmente indipendenti. Si noti che l'implicazione inversa è banale (sempre verificata), quindi non serve.

Pertanto le due nozioni di dipendenza e indipendenza lineare sono complementari (o l'una o l'altra).

I vettori dell'esempio precedente sono linearmente dipendenti.

**Esempio.** Consideriamo i seguenti vettori di $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\;\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$$

e proviamo a capire se sono linearmente indipendenti oppure no. Dobbiamo se esistono due scalari non entrambi nulli $x, y \in \mathbb{R}$ t.c.

$$x\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x + 3y = 0\\ 3x - 2y = 0\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\3 & -2\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 3\\0 & -11\end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x + 3y = 0\\ -11y = 0\end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0\\ y = 0\end{cases}$$

L'unica soluzione è quella banale, quindi i vettori sono linearmente indipendenti.

Per stabilire la dipendenza o indipendenza lineare di vettori in $\mathbb{K}^n$ possiamo impostare un sistema omogeneo, risolverlo e vedere se ci sono soluzioni non nulle. Più avanti vedremo un metodo più veloce.

**Oss.** Se uno dei vettori $v_1, \ldots, v_n$ è nullo allora questi vettori sono linearmente dipendenti. Infatti se $v_1 = 0_V$ si ha:

$$1 \cdot 0_V + 0v_2 + \cdots + 0v_n = 0_V$$

è combinazione lineare nulla non banale essendo 1 il primo coefficiente.

**Vettori proporzionali.** $v, w \in V$ sono *proporzionali* se $\exists\, \alpha \in \mathbb{K}$ t.c.

$$v = \alpha w \;\text{ oppure }\; w = \alpha v.$$

**Prop.** *$v, w \in V$ sono linearmente dipendenti $\Leftrightarrow$ $v, w$ sono proporzionali.*

*Dim.* $\boxed{\Rightarrow}$ $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ non entrambi nulli t.c. $\alpha v + \beta w = 0_V$.
$\beta \neq 0 \Rightarrow w = -\frac{\alpha}{\beta} v$. $\alpha \neq 0 \Rightarrow v = -\frac{\beta}{\alpha} w$. Quindi sono proporzionali.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\exists\, \alpha \in \mathbb{K}$ t.c. $v = \alpha w \Rightarrow v - \alpha w = 0_V$ oppure $w = \alpha v \Rightarrow \alpha v - w = 0_V$. In entrambi i casi otteniamo una combinazione lineare nulla non banale. Quindi sono linearmente dipendenti. $\square$

**Esempio.**

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \ w = \begin{pmatrix} 6 \\ 21 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

sono proporzionali: $w = 3v$. Quindi sono linearmente dipendenti.

**Esempio.**

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \ w = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

non sono proporzionali. Quindi sono linearmente indipendenti.

**N.B.** Questo metodo per stabilire la lineare dipendenza/indipendenza è valido se i vettori sono due, non se sono più di due, come illustrato nel primo esempio sopra e in quello seguente.

**Esempio.** I seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente dipendenti?

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 2x + y + 4z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 8z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -3t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \qquad -3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema ammette soluzioni non nulle quindi i vettori dati sono linearmente dipendenti.