Dipendenza e indipendenza lineare in $\mathbb{K}^m$

Per stabilire se vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$$

sono linearmente dipendenti o indipendenti si risolve l'equazione vettoriale

$$x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = 0_{\mathbb{K}^m}$$

che equivale al sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite

$$AX = 0_{\mathbb{K}^m}$$

con $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ matrice avente come colonne i vettori dati.

In pratica occorre sapere se il sistema ammette o no soluzioni non nulle, e questo si traduce nel capire il numero r di pivot della matrice a gradini ottenuta da A mediante l'algoritmo di Gauss. Si hanno parametri liberi se e solo se $r < n$ (il numero dei parametri liberi è $d = n - r$). Pertanto i vettori $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti se e solo se $r = n$. Sono invece linearmente dipendenti se e solo se $r < n$.

Si osservi che il numero m di equazioni è uguale al numero di componenti dei vettori (appartengono a $\mathbb{K}^m$), mentre il numero n di incognite è uguale al numero di vettori. Sappiamo dalla Lezione 11 che un sistema omogeneo ha infinite soluzioni se il numero di incognite è maggiore del numero di equazioni. Si ha quindi la proposizione seguente.

Prop. *I vettori $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^m$ sono linearmente dipendenti se $n > m$.*

Esempio. I seguenti quattro vettori di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente dipendenti.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esempio. I vettori v_1, v_2, v_3 dell'esempio precedente sono linearmente dipendenti o indipendenti?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il numero di pivot è 3 ed è uguale al numero di vettori e quindi v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti.

Il metodo di Gauss ci fornisce anche un'altra informazione: dopo aver ridotto a gradini la matrice avente per colonne $v_1, \dots, v_n$, le colonne dove si trovano i pivot corrispondono a vettori linearmente indipendenti tra quelli assegnati. Infatti una loro combinazione lineare nulla ha per coefficienti una soluzione del sistema lineare omogeneo con gli eventuali parametri liberi nulli, quindi è la soluzione nulla. Il numero di pivot della matrice a gradini è pertanto il massimo numero di colonne linearmente indipendenti. Si tratta di un numero importante e si associa alle matrici.

Def. Il *rango* di una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ è il *massimo* numero di colonne di A linearmente indipendenti. Si denota con $\text{rg}(A)$ oppure con $\text{rk}(A)$ (dall'inglese *rank*).

Oss. Se A è una matrice $m \times n$ allora $0 \leqslant \text{rg}(A) \leqslant \min(m, n)$.

Oss. Una matrice ha rango 0 $\Leftrightarrow$ è la matrice nulla.

Oss. $\text{rg}(I_n) = n$.

Per determinare il rango di una matrice si applica l'algoritmo di Gauss per ottenere una matrice a gradini e il rango è uguale al numero di pivot della matrice a gradini. Le colonne dove si trovano i pivot corrispondono a colonne linearmente indipendenti della matrice di partenza.

Esempio. Calcoliamo il rango della matrice seguente.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A) = 3.$$

I pivot sono nelle prime tre colonne e quindi le prime tre colonne di A sono linearmente indipendenti.

Teorema di Rouché-Capelli. *Consideriamo un sistema lineare*

$$S : AX = B$$

con $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ *e* $B \in \mathbb{K}^m$. *Allora* S *è compatibile se e solo se*

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A\,|\,B).$$

Se questo accade allora la soluzione generale ha $n - \text{rg}(A)$ *parametri liberi, ed è unica se e solo se* $\text{rg}(A) = n$.

Dim. L'algoritmo di Gauss trasforma la matrice completa $\tilde{A} = (A\,|\,B)$ in una a gradini. S compatibile $\Leftrightarrow$ non risultano equazioni del tipo $0 = b$ con $b \neq 0$ $\Leftrightarrow$ i pivot sono tutti sulle prime n colonne $\Leftrightarrow$ $\text{rg}(A) = \text{rg}(A\,|\,B)$.

Se S è compatibile avremo $d = n - \text{rg}(A)$ parametri liberi perché il rango è il numero di pivot. La soluzione è unica se $d = 0$. $\square$

Oss. Il numero $d = n - \text{rg}(A)$ di parametri liberi dipende solo dal numero di incognite e dal rango di A. È una proprietà dello spazio delle soluzioni.