Sottospazi vettoriali

Def. Consideriamo un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V. Un sottoinsieme $U \subseteq V$ è detto *sottospazio vettoriale* se $\forall\, u, v \in U$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{K}$ si ha:

1) $U \neq \emptyset$ (U non vuoto).
2) $u + v \in U$ (U chiuso rispetto all'addizione).
3) $\alpha u \in U$ (U chiuso rispetto a prodotto per scalari).

Teor. *Sia $U \subset V$ sottospazio vettoriale. Allora $0_V \in U$. Inoltre U è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale rispetto alle operazioni ereditate da V.*

Dim. $U \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, u \in U \overset{(3)}{\Rightarrow} 0u = 0_V \in U$.
$\forall\, u \in U \Rightarrow -u = (-1)u \in U$.
U è chiuso rispetto all'addizione e al prodotto per scalari, contiene il vettore nullo e l'opposto di ogni suo vettore. Valgono gli assiomi di spazio vettoriale perché discendono da V. Quindi U è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. $\square$

Oss. Il sottoinsieme $\{0_V\} \subset V$ che contiene solo il vettore nullo è un sottospazio vettoriale di V detto *sottospazio nullo* e indicato con 0 (non confondere il simbolo 0 nelle sue varie accezioni).

Oss. Sia $U \subset V$ sottospazio vettoriale. Dati $n \in \mathbb{N}$, $u_1, \ldots, u_n \in U$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n \in U$ (infatti U è $\mathbb{K}$-spazio vettoriale).

Prop. *Sia $U \subseteq V$ un sottoinsieme non vuoto di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V. Allora U è sottospazio vettoriale di $V \Leftrightarrow \forall\, u, v \in U$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ si ha:*

2′) $\alpha u + \beta v \in U$.

Dim. La (*1*) è soddisfatta per ipotesi.
$\boxed{\Rightarrow}$ Supponiamo $U \subseteq V$ sottospazio vettoriale $\Rightarrow U$ contiene tutte le combinazioni lineari di suoi vettori (vedi Oss. precedente).

$\boxed{\Leftarrow}$ Supponiamo che U soddisfi la (*2′*). Si ottiene (*2*) ponendo $\alpha = \beta = 1$ nella (*2′*). Si ottiene (*3*) ponendo $\beta = 0$ nella (*2′*). $\square$

Spazio delle soluzioni di un sistema omogeneo. Dato un sistema lineare omogeneo

$$S : AX = 0_{\mathbb{K}^m}$$

con $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, lo spazio delle soluzioni è il sottoinsieme

$$\Sigma_S = \{u \in \mathbb{K}^n \mid Au = 0_{\mathbb{K}^m}\} \subset \mathbb{K}^n.$$

Teor. *Lo spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n incognite è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$.*

Dim. $0_{\mathbb{K}^n} \in \Sigma_S \neq \emptyset$. $\forall\, u, v \in \Sigma_S$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ si ha:
$A(\alpha u + \beta v) = A\alpha u + A\beta v = \alpha Au + \beta Av = 0_{\mathbb{K}^m} \Rightarrow \alpha u + \beta v \in \Sigma_S$. $\square$

N.B. Se il sistema non è omogeneo allora lo spazio delle soluzioni non è un sottospazio vettoriale perché non contiene il vettore nullo (e se il sistema è incompatibile lo spazio delle soluzioni è vuoto).

Span. Consideriamo uno spazio vettoriale V e vettori $v_1, \dots, v_n \in V$. Definiamo il sottoinsieme

$$\text{span}(v_1, \dots, v_n) \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}\} \subset V.$$

Gli elementi di $\text{span}(v_1, \dots, v_n)$ sono tutte e sole le combinazioni lineari di $v_1, \dots, v_n$, al variare dei coefficienti $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ in tutti i modi.

Per definizione poniamo anche $\text{span}(\emptyset) = \{0\}$, lo *spazio vettoriale nullo*.

Oss.

1) $v \in \text{span}(v_1, \dots, v_n) \Leftrightarrow \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ t.c. $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$.

2) $\text{span}(0_V) = \{0_V\} = \text{span}(\emptyset)$ spazio vettoriale nullo.

3) $\text{span}(v) = \{\alpha v \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$ insieme di tutti i multipli scalari di v.

Prop. $\text{span}(v_1, \dots, v_n)$ *è un sottospazio vettoriale di* V*.*

Dim. Verifichiamo le proprietà della definizione.

1) $0_V = 0v_1 + \cdots + 0v_n \in \text{span}(v_1, \dots, v_n) \neq \emptyset$.

2) $\forall\, u, v \in \text{span}(v_1, \dots, v_n)$ si ha per certi α_i e $\beta_i \in \mathbb{K}$

$$u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$
$$v = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$$

$$u + v = (\alpha_1 + \beta_1)v_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)v_n \in \text{span}(v_1, \dots, v_n).$$

3) $\forall\, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall\, u \in \text{span}(v_1, \dots, v_n)$ scritto come sopra si ha

$$\beta u = (\beta\alpha_1)v_1 + \cdots + (\beta\alpha_n)v_n \in \text{span}(v_1, \dots, v_n). \qquad \square$$

Def. $\text{span}(v_1, \dots, v_n)$ è detto *sottospazio vettoriale generato da* $v_1, \dots, v_n$ e questi vettori sono detti *generatori*. Si indica anche con $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$.

Oss. $v_1, \dots, v_n \in \text{span}(v_1, \dots, v_n)$, $\forall\, i = 1, \dots, n$.

Oss. $\text{span}(v_1, \dots, v_n)$ è il più piccolo sottospazio vettoriale di V che contiene $v_1, \dots, v_n$, ossia $\forall\, U \subseteq V$ sottospazio vettoriale t.c. $v_1 \dots, v_n \in U$ $\Rightarrow \text{span}(v_1, \dots, v_n) \subseteq U$.

Def. V è *finitamente generato* se $\exists\, n \in \mathbb{N}$ e $\exists\, v_1 \dots, v_n \in V$ t.c.

$$V = \text{span}(v_1, \dots, v_n).$$

$v_1, \dots, v_n$ sono detti *generatori* di V.

Basi di spazi vettoriali

Def. Una *base* per V è un insieme di generatori linearmente indipendenti.

Oss. $(v_1, \dots, v_n)$ base per $V \Leftrightarrow V = \text{span}(v_1, \dots, v_n)$ e $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti.

Base canonica di $\mathbb{K}^n$. Consideriamo i seguenti vettori di $\mathbb{K}^n$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

colonne di $I_n \Rightarrow e_1, \dots, e_n$ linearmente indipendenti (perché $\text{rg}\, I_n = n$).

$$\forall\, v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \;\Rightarrow\; v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$$

$\Rightarrow \mathbb{K}^n = \text{span}(e_1, \dots, e_n)$. Pertanto $e_1, \dots, e_n$ formano una base per $\mathbb{K}^n$.

Def. $\mathcal{E}_n := (e_1, \dots, e_n)$ è detta *base canonica* per $\mathbb{K}^n$.

Oss. $\mathbb{K}^n$ è finitamente generato.

Esempio.

$\underline{n = 1}$. $e_1 = 1 \rightsquigarrow \mathcal{E}_1 = (e_1)$ base canonica per $\mathbb{K}$.

$\underline{n = 2}$. $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathcal{E}_2 = (e_1, e_2)$ base canonica per $\mathbb{K}^2$.

$\underline{n = 3}$. $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathcal{E}_3 = (e_1, e_2, e_3)$.

Prop. *$v_1, \dots, v_n \in V$ linearmente dipendenti $\Leftrightarrow$ uno di essi è combinazione lineare degli altri.*

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ $\exists\, \alpha_1, \dots \alpha_n \in \mathbb{K}$ non tutti nulli t.c.

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0_V.$$

A meno di riordinare i vettori possiamo assumere $\alpha_n \neq 0 \Rightarrow$

$$v_n = -\alpha_n^{-1}(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{n-1} v_{n-1})$$

$\Rightarrow v_n$ combinazione lineare di $v_1, \dots, v_{n-1}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ A meno di riordinarli possiamo assumere v_n combinazione lineare di $v_1, \dots, v_{n-1} \Rightarrow \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$ t.c. $v_n = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{n-1} v_{n-1} \Rightarrow$

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{n-1} v_{n-1} - v_n = 0_V$$

combinazione lineare nulla non banale $\Rightarrow v_1, \dots, v_n$ lin. indipendenti. $\square$

Lem. $v \in \text{span}(v_1, \dots, v_n) \Leftrightarrow \text{span}(v, v_1, \dots, v_n) = \text{span}(v_1, \dots, v_n)$.

Dim. $\boxed{\Leftarrow}$ Evidente perché $v \in \text{span}(v, v_1, \dots, v_n)$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Ogni combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$ è anche combinazione lineare di $v, v_1, \dots, v_n$ ponendo 0 come coefficiente di $v \Rightarrow$

$$\text{span}(v_1, \dots, v_n) \subset \text{span}(v, v_1, \dots, v_n).$$

Dimostriamo l'altra inclusione.
$v \in \text{span}(v_1, \dots, v_n) \Rightarrow \exists\, \alpha_1 \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ t.c.

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

$\forall\, w \in \text{span}(v, v_1, \dots, v_n) \Rightarrow \exists\, \beta, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$ t.c.

$$\begin{aligned} w &= \beta v + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n \\ &= \beta(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n \\ &= (\beta\alpha_1 + \beta_1) v_1 + \cdots + (\beta\alpha_n + \beta_n) v_n \in \text{span}(v_1, \dots, v_n) \\ &\Rightarrow \text{span}(v, v_1, \dots, v_n) \subset \text{span}(v_1, \dots, v_n). \end{aligned}$$

Dalle due inclusioni si ha l'uguaglianza. □

Oss. Un generatore può essere eliminato $\Leftrightarrow$ è combinazione lin. degli altri.

Teor. *Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette una base.*

Dim. Supponiamo $V = \text{span}(v_1, \dots, v_n)$. Facciamo induzione su $n \geqslant 0$.

Base dell'induzione: $n = 0$. Non ci sono generatori e quindi $V = \{0\}$ è lo spazio vettoriale nullo avente l'insieme vuoto come base.

Ipotesi induttiva. Supponiamo che ogni spazio vettoriale con $n - 1 \geqslant 0$ generatori ammetta una base e sia V generato da n vettori $v_1, \dots, v_n$.
Se $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti allora formano base per V.
Se invece sono linearmente dipendenti, per la Prop. un certo v_k è combinazione lineare degli altri v_i, e per il Lem. v_k può essere eliminato. Quindi V ammette $n - 1$ generatori. Per l'ipotesi induttiva V ammette base. □

Oss. Ogni insieme finito di generatori per V contiene una base per V.