Componenti

Teor. *Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. I vettori $b_1, \ldots, b_n \in V$ formano una base per $V \Leftrightarrow \forall\, v \in V$ esistono unici $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ t.c.*

$$v = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n.$$

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ $b_1, \ldots, b_n \in V$ generatori $\Rightarrow \forall\, v \in V\ \exists\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ t.c.

$$v = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n.$$

Mostriamo che i coefficienti sono unici. Supponiamo che

$$v = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n$$
$$v = \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_n b_n$$

da cui sottraendo membro a membro

$$(\alpha_1 - \beta_1) b_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n) b_n = 0_V.$$

Dato che $b_1, \ldots, b_n$ sono lin. indip. i coefficienti sono tutti nulli

$$\begin{cases} \alpha_1 - \beta_1 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_n - \beta_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \alpha_n = \beta_n. \end{cases}$$

Quindi i coefficienti corrispondenti sono uguali, da cui si ha l'unicità.

$\boxed{\Leftarrow}$ Per ipotesi $b_1, \ldots, b_n$ sono generatori di V. Inoltre 0_V si scrive in un unico modo come combinazione lin. di $b_1, \ldots, b_n$: la combinazione lin. banale. Quindi $b_1, \ldots, b_n$ sono linearmente indipendenti. $\square$

Def. Sia $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ una base per V e sia $v = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n \in V$. I coefficienti $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sono detti *componenti* o *coordinate* di v rispetto alla base $\mathcal{B}$. Le scriviamo come n-upla

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n.$$

Scriviamo anche

$$v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}^{\mathcal{B}} = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n.$$

N.B. Le componenti di un vettore dipendono dalla base, oltre che dal vettore stesso.

Oss. Le componenti del vettore nullo sono tutte nulle:

$$0_V = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathcal{B}}.$$

Oss. Fissata una base $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ e dati $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ abbiamo

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n \\ v &= \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_n b_n \\ u + v &= (\alpha_1 + \beta_1) b_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) b_n \\ \lambda u &= (\lambda \alpha_1) b_1 + \cdots + (\lambda \alpha_n) b_n \end{aligned}$$

Segue che le combinazioni lineari di vettori di V corrispondono a combinazioni lineari dei vettori delle coordinate.