Dimensione

Teor. *Sia $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ base per V e siano $u_1, \dots, u_k \in V$ vettori linearmente indipendenti. Allora $k \leqslant n$.*

Dim. Per assurdo supponiamo $k > n$. Coordinate rispetto a $\mathcal{B} \rightsquigarrow$

$$u_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}^{\mathcal{B}}, \dots, u_k = \begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \vdots \\ \alpha_{nk} \end{pmatrix}^{\mathcal{B}}$$

$$x_1 u_1 + \dots + x_k u_k = 0_V$$

deve avere come unica soluzione quella nulla. In coordinate equivale a

$$x_1 \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix} + \dots + x_k \begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \vdots \\ \alpha_{nk} \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{K}^n}$$

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1k}x_k = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{n1}x_1 + \dots + \alpha_{nk}x_k = 0 \end{cases}$$

sistema omogeneo di n equazioni in k incognite.
$k > n \Rightarrow \exists$ soluzione non nulla $\Rightarrow u_1, \dots, u_k$ linearmente dipendenti, contraddizione. Pertanto si deve avere $k \leqslant n$. $\square$

Teor. *Due basi qualsiasi di uno spazio vettoriale finitamente generato hanno lo stesso numero di vettori.*

Dim. Siano $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$, $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_k)$ basi di V. Per il teorema, $k \leqslant n$ dato che $c_1, \dots, c_k$ sono linearmente indipendenti. Scambiando il ruolo delle due basi si ha anche $n \leqslant k$. Quindi $n = k$. $\square$

Def. Il numero di vettori di una base per V si chiama *dimensione* di V e si indica con $\dim_{\mathbb{K}} V$. Se V non è finitamente generato si pone $\dim_{\mathbb{K}} V = \infty$.

N.B. Scriviamo semplicemente $\dim V$ quando $\mathbb{K}$ è chiaro dal contesto.

Oss. $\mathbb{K}^n$ ha la base canonica $\mathcal{E}_n = (e_1, \dots, e_n) \Rightarrow \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$.

Oss. V finitamente generato $\Leftrightarrow \dim V < \infty$.

Oss. $\dim V = 0 \Leftrightarrow V = \{0\}$ (spazio vettoriale nullo).

Oss. $\dim V = 1 \Leftrightarrow \exists\, v \in V$ non nullo t.c. $V = \mathrm{span}(v) = \{\alpha v \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$ e V è anche detto *retta vettoriale*.

N.B. La dimensione è un numero naturale (oppure ∞) ed è molto importante. Occorre sempre tenerne conto e imparare a calcolarla.

Il seguente teorema lo enunciamo senza dimostrazione.

Teor. *Se $\dim V < \infty$ e $U \subset V$ sottospazio vettoriale $\Rightarrow \dim U \leqslant \dim V$. Vale uguaglianza $\Leftrightarrow U = V$.*

Oss. $\dim V =$ massimo numero di vettori linearmente indipendenti di V.

Cor. *Sia* $\dim V = n$ *e siano* $v_1, \dots, v_n \in V$. *Le seguenti sono equivalenti:*

a) $(v_1, \dots, v_n)$ *linearmente indipendenti;*

b) $(v_1, \dots, v_n)$ *generano* V*;*

c) $(v_1, \dots, v_n)$ *base per* V.

Dim. $\boxed{a \Rightarrow b}$ $\dim(\mathrm{span}(v_1, \dots, v_n)) = \dim V \Rightarrow \mathrm{span}(v_1, \dots, v_n) = V$.

$\boxed{b \Rightarrow c}$ $(v_1, \dots, v_n)$ contiene base con n vettori $\Rightarrow (v_1, \dots, v_n)$ base.

$\boxed{c \Rightarrow a}$ Per definizione di base. □

Oss. Per stabilire se certi vettori formano una base per V basta che il loro numero sia uguale a $\dim V$ e che siano generatori oppure che siano linearmente indipendenti.

Oss. Se $\dim V = 1$ allora un vettore $v \in V$ è base per $V \Leftrightarrow v \neq 0_V$.

Esempio. Due vettori di $\mathbb{R}^2$ formano una base $\Leftrightarrow$ non sono proporzionali.

Matrici

Spazio delle colonne e spazio delle righe. $A \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \rightsquigarrow$

$\mathrm{CS}(A) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{span}(A_{(1)}, \dots, A_{(n)}) \subset \mathbb{K}^m$ *Spazio delle colonne di A. (Column Space)*

$\mathrm{RS}(A) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(m)}) \subset \mathbb{K}^n$ *Spazio delle righe di A. (Row Space)*

Rango come dimensione. $\mathrm{rg}\, A = \dim \mathrm{CS}(A) = \dim \mathrm{RS}(A)$.

Calcoli con le basi

Data una base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ per V e dati $u_1 \dots, u_k \in V$ possiamo determinare una base di

$$U = \mathrm{span}(u_1, \dots, u_k) \subset V$$

considerando la matrice $A \in M_{n,k}(\mathbb{K})$ avente per colonne le coordinate dei vettori $u_1, \dots, u_k$ rispetto a $\mathcal{B}$. Mediante l'algoritmo di Gauss trasformiamo A in A' a gradini. Si ha:

$$\dim U = \text{numero dei pivot.}$$

Una base di U è data da quei generatori $u_1, \dots, u_k$ corrispondenti alle colonne dei pivot (potrebbero essere tutti o solo alcuni).

Esempio. Determinare base e dimensione di $U = \mathrm{span}(u_1, u_2, u_3, u_4) \subset \mathbb{R}^4$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 pivot nelle colonne $1, 2, 4 \Rightarrow \dim U = 3$ e (u_1, u_2, u_4) base per U.