Applicazioni lineari

Def. Un'applicazione $f : V \to W$ tra $\mathbb{K}$-spazi vettoriali è *lineare* se valgono le seguenti, $\forall\, u, v \in V$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{K}$

1) $f(u + v) = f(u) + f(v)$.

2) $f(\alpha v) = \alpha f(v)$.

Oss. $f : V \to W$ lineare $\Rightarrow f(0_V) = 0_W$. $f(0_V) = f(0\, 0_V) = 0 f(0_V) = 0_W$.

Esempio. $\mathrm{id}_V : V \to V$, $\mathrm{id}_V(v) = v$, $\forall\, v \in V$ *applicazione identica* lineare.

Esempio. $0 : V \to W$, $0(v) = 0_W$, $\forall\, v \in V$ *applicazione nulla* lineare.

Esempio. $\alpha \in \mathbb{K} - \{0\} \rightsquigarrow h_\alpha : V \to V$, $h_\alpha(v) = \alpha v$ *omotetia* lineare.

Applicazione lineare associata ad una matrice.

$$A \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \rightsquigarrow L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$$
$$L_A(X) = AX.$$

$L_A(X + Y) = A(X + Y) = AX + AY = L_A(X) + L_A(Y)$, $\forall\, X, Y \in \mathbb{K}^n$
$L_A(\alpha X) = A(\alpha X) = \alpha AX = \alpha L_A(X)$, $\forall\, X \in \mathbb{K}^n$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow L_A$ lineare.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightsquigarrow L_A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Def. Un polinomio omogeneo di primo grado in $x_1, \ldots, x_n$ è un'espressione del tipo $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$, con $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ non tutti nulli.

Oss. $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ha per componenti polinomi omogenei di primo grado oppure nulli. Le applicazioni di questo tipo sono lineari.

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \rightsquigarrow L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$L_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ -3x + 5y \end{pmatrix}$$

Prop. $f : V \to W$ *lineare* $\Leftrightarrow$

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v), \quad \forall\, u, v \in V, \ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ $f(\alpha u + \beta v) = f(\alpha u) + f(\beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si ottiene *1)* per $\alpha = \beta = 1$ e *2)* per $\beta = 0$. $\square$

Oss. $f : V \to W$ lineare $\Leftrightarrow \forall\, n \in N$, $\forall\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, $\forall\, v_1, \ldots, v_n \in V$,

$$f(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \cdots + \alpha_n f(v_n), \quad \text{ossia}$$
$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(v_i).$$

Esempio. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y$ non è lineare, infatti
$4 = f(2, 0) = f(2(1, 0)) \neq 2f(1, 0) = 2$.

Esempio. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + y + 1$ non è lineare, infatti $f(0, 0) = 1$.