Nucleo e immagine

Nucleo. $f : V \to W$ lineare $\rightsquigarrow$

$$\ker f \overset{\text{def}}{=} \{v \in V \mid f(v) = 0_W\} \subset V$$

Def. $\ker f$ si chiama *nucleo* di f (dall'inglese *kernel*).

Oss. Dato $v \in V$, si ha che $v \in \ker f \Leftrightarrow f(v) = 0_W$.

Oss. $A \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \rightsquigarrow \ker L_A = \Sigma_S$ con $S : AX = 0_{\mathbb{K}^m}$.

Teor. *$f : V \to W$ lineare $\Rightarrow$ $\ker f$ sottospazio vettoriale di V.*

Dim. $f(0_V) = 0_W \Rightarrow 0_V \in \ker f \neq \emptyset$.
$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall\, u, v \in \ker f \Rightarrow f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) = 0_W \Rightarrow \alpha u + \beta v \in \ker f$. $\square$

Def. $f : V \to W$ è *iniettiva* se $\forall\, u, v \in V$, $f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$.

Teor. *$f : V \to W$ lineare. Allora f iniettiva $\Leftrightarrow$ $\ker f = \{0_V\}$.*

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ $\forall\, v \in \ker f \Rightarrow f(v) = f(0_V) = 0_W \Rightarrow v = 0_V \Rightarrow \ker f = \{0_V\}$.
$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall\, u, v \in V$, $f(u) = f(v) \Rightarrow f(u) - f(v) = 0_W \Rightarrow f(u - v) = 0_W \Rightarrow u - v \in \ker f = \{0_V\} \Rightarrow u - v = 0_V \Rightarrow u = v$. $\square$

Cor. *$f : V \to W$ lineare. Allora f iniettiva $\Leftrightarrow$ $\dim(\ker f) = 0$.*

Nucleo di L_A. Data $A \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \rightsquigarrow L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $L_A(X) = AX$.
$X \in \ker L_A \Leftrightarrow L_A(X) = 0_{\mathbb{K}^m} \Leftrightarrow AX = 0_{\mathbb{K}^m} \Leftrightarrow X$ è soluzione del sistema

$$S_A : AX = 0_{\mathbb{K}^m}$$

Prop. *$\ker L_A$ è lo spazio delle soluzioni di $S_A : AX = 0_{\mathbb{K}^m}$.*

Immagine. $f : V \to W$ lineare $\rightsquigarrow$

$$\operatorname{im} f \overset{\text{def}}{=} \{f(v) \mid v \in V\} \subset W$$

Def. $\operatorname{im} f$ si chiama *immagine* di f.

Oss. Dato $w \in W$, si ha che $w \in \operatorname{im} f \Leftrightarrow \exists\, v \in V$ t.c. $f(v) = w$.

Teor. *$f : V \to W$ lineare $\Rightarrow$ $\operatorname{im} f$ sottospazio vettoriale di W.*

Dim. $f(0_V) = 0_W \Rightarrow 0_W \in \operatorname{im} f \neq \emptyset$.
$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall\, w_1, w_2 \in \operatorname{im} f \Rightarrow \exists\, v_1, v_2 \in V$ t.c. $f(v_1) = w_1$ e $f(v_2) = w_2$ $\Rightarrow \alpha w_1 + \beta w_2 = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2) = f(\alpha v_1 + \beta v_2) \in \operatorname{im} f$. $\square$

Def. $f : V \to W$ è *suriettiva* se $\operatorname{im} f = W$.

Oss. f suriettiva $\Leftrightarrow \forall\, w \in W$, $\exists\, v \in V$ t.c. $f(v) = w$.

Def. $\operatorname{rg} f \overset{\text{def}}{=} \dim(\operatorname{im} f)$ si chiama *rango* di f.

Oss. $f : V \to W$ lineare, $\dim W < \infty$. Allora f suriettiva $\Leftrightarrow \operatorname{rg} f = \dim W$.

Generatori per l'immagine

Prop. $V = \operatorname{span}(v_1, \dots, v_n) \Rightarrow \operatorname{im} f = \operatorname{span}(f(v_1), \dots, f(v_n))$.

Dim. $f(v_1), \dots, f(v_n) \in \operatorname{im} f \Rightarrow \operatorname{span}(f(v_1), \dots, f(v_n)) \subset \operatorname{im} f$.

$\forall\, w \in \operatorname{im} f$, $\exists\ v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in V$ t.c.

$$w = f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(v_i) \in \operatorname{span}(f(v_1), \dots, f(v_n))$$

$\Rightarrow \operatorname{im} f \subset \operatorname{span}(f(v_1), \dots, f(v_n))$ e quindi si ha la tesi. $\square$

Cor. *Per ogni matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ si ha* $\operatorname{im} L_A = \operatorname{span}\big(A_{(1)}, \dots, A_{(n)}\big)$.

Dim. $L_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $L_A(X) = AX$. $(e_1, \dots, e_n)$ base canonica di $\mathbb{K}^n \Rightarrow$

$$\operatorname{im} L_A = \operatorname{span}(L_A(e_1), \dots, L_A(e_n)).$$

$$L_A(e_1) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A_{(1)}$$

$$\vdots$$

$$L_A(e_n) = A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A_{(n)}$$ $\square$

Cor. $\operatorname{rg} L_A = \operatorname{rg} A$.

Dim. $\operatorname{rg} L_A = \dim(\operatorname{im} L_A) = \dim\big(\operatorname{span}\big(A_{(1)}, \dots, A_{(n)}\big)\big) = \operatorname{rg} A$. $\square$

Cor. $L_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ *suriettiva* $\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = m$.