Teorema della dimensione

Teor. $f : V \to W$ *lineare e* $\dim V < \infty \Rightarrow \dim V = \dim(\ker f) + \operatorname{rg} f$.

Dim. $\dim V = n$, $\dim(\ker f) = k \leqslant n$.
$(u_1, \dots, u_k)$ base per $\ker f \rightsquigarrow \underbrace{(u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_{n-k})}_{\text{completamento della base}}$ base per V.

$f(u_i) = 0_W$, $w_i := f(v_i) \Rightarrow w_1, \dots, w_{n-k}$ generatori di $\operatorname{im} f$.
Mostriamo che $w_1, \dots, w_{n-k}$ sono linearmente indipendenti.

$$\sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i w_i = 0_W \Rightarrow 0_W = \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i f(v_i) = f\left(\sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i v_i\right) \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i v_i \in \ker f \Rightarrow \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \beta_i u_i \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i v_i - \sum_{i=1}^{k} \beta_i u_i = 0_V \Rightarrow \alpha_i = 0,\ \beta_i = 0,\ \forall i.$$

$(w_1, \dots, w_{n-k})$ base per $\operatorname{im} f \Rightarrow \operatorname{rg} f = \dim(\operatorname{im} f) = n - k \Rightarrow$

$$\dim(\ker f) + \operatorname{rg} f = k + n - k = \dim V. \qquad \square$$

Isomorfismi di spazi vettoriali

Consideriamo $\mathbb{K}$-spazi vettoriali V e W.

Def. $f : V \to W$ *biiettiva* (o *biunivoca*) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ f iniettiva e suriettiva.

Oss. $f : V \to W$ biiettiva $\Leftrightarrow \forall w \in W, \exists!\, v \in V$ t.c. $f(v) = w$
$\Leftrightarrow \exists\, f^{-1} : W \to V$ *applicazione inversa:* $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_V$ e $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_W$.

Oss. $f^{-1}(f(v)) = (f^{-1} \circ f)(v) = \mathrm{id}_V(v) = v$ e similmente $f(f^{-1}(w)) = w$.

Def. $f : V \to W$ *isomorfismo* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ f lineare e biiettiva.

Oss. $\mathrm{id}_V : V \to V$ isomorfismo.

Prop. $f : V \to W$ *isomorfismo* $\Rightarrow f^{-1} : W \to V$ *lineare.*

Dim. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall w_1, w_2 \in W \rightsquigarrow v_1 := f^{-1}(w_1)$, $v_2 := f^{-1}(w_2) \Rightarrow$
$w_1 = f(v_1)$, $w_2 = f(v_2)$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(\alpha w_1 + \beta w_2) &= f^{-1}(\alpha f(v_1) + \beta f(v_2)) \\ &= f^{-1}(f(\alpha v_1 + \beta v_2)) \qquad (f \text{ lineare}) \\ &= \alpha v_1 + \beta v_2 \\ &= \alpha f^{-1}(w_1) + \beta f^{-1}(w_2). \end{aligned} \qquad \square$$

Def. V e W sono *isomorfi* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\, f : V \to W$ isomorfismo.
In questo caso scriviamo $V \cong W$ (si legge V isomorfo a W).

Consideriamo $\mathbb{K}$-spazi vettoriali U, V, W.

Prop. *$f : U \to V$ e $g : V \to W$ lineari $\Rightarrow$ $g \circ f : U \to W$ lineare.*

Dim. $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall\, u_1, u_2 \in U \Rightarrow (g \circ f)(\alpha u_1 + \beta u_2) = g(f(\alpha u_1 + \beta u_2)) =$
$g(\alpha f(u_1) + \beta f(u_2)) = \alpha g(f(u_1)) + \beta g(f(u_2)) =$
$\alpha(g \circ f)(u_1) + \beta(g \circ f)(u_2)$. □

Oss. In altre parole, composizioni di applicazioni lineari sono lineari.

Cor. *$f : U \to V$ e $g : V \to W$ isomorfismi $\Rightarrow$ $g \circ f : U \to W$ isomorfismo.*

Dim. $g \circ f$ è lineare e invertibile con inversa $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. □

Oss. In altre parole, composizioni di isomorfismi sono isomorfismi.

Teor. *Siano $f : V \to W$ lineare e $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ base per V. Allora*

1) *f suriettiva $\Leftrightarrow$ $f(b_1), \ldots, f(b_n)$ generano W.*
2) *f iniettiva $\Leftrightarrow$ $f(b_1), \ldots, f(b_n)$ linearmente indipendenti.*
3) *f isomorfismo $\Leftrightarrow$ $(f(b_1), \ldots, f(b_n))$ base per W.*

Dim. *1*) Segue subito dal fatto che $\operatorname{im} f = \operatorname{span}(f(b_1), \ldots, f(b_n))$.
2) f iniettiva $\Leftrightarrow \dim(\ker f) = 0 \Leftrightarrow \dim(\operatorname{im} f) = \operatorname{rg} f \underset{\text{Teor dim}}{=} \dim V = n$.
Segue la tesi dal fatto che $\dim(\operatorname{im} f) = n \Leftrightarrow f(b_1), \ldots, f(b_n)$ lin. indip.
3) Segue subito dalle precedenti. □

Cor (Invarianza della dimensione)**.** *$V \cong W \Rightarrow \dim V = \dim W$.*

Cor. *$\mathbb{K}^m \cong \mathbb{K}^n \Rightarrow m = n$.*

Teor. *Sia $f : V \to W$ lineare e $\dim V = \dim W < \infty$. Sono equivalenti:*

1) *f suriettiva;*
2) *f iniettiva;*
3) *f isomorfismo;*

Dim. f suriettiva $\Leftrightarrow \operatorname{rg} f = \dim W \Leftrightarrow \dim(\ker f) \underset{\text{Teor dim}}{=} \dim V - \operatorname{rg} f = 0 \Leftrightarrow$
f iniettiva. Pertanto (*1*) $\Leftrightarrow$ (*2*) $\Rightarrow$ (*3*) $\Rightarrow$ (*1*). □

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$L_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + y \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rg} L_A = \operatorname{rg} A = 2 \Rightarrow L_A$ suriettiva e quindi isomorfismo.