Applicazioni lineari associate a matrici

Def. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \overset{\text{def}}{=} \{M \in M_n(\mathbb{K}) \mid M \text{ invertibile}\}$ si chiama *gruppo lineare generale di ordine n su $\mathbb{K}$*. È l'insieme delle matrici invertibili $n \times n$.

La seguente proposizione è la ragione principale alla base della definizione del prodotto righe per colonne: il prodotto di matrici corrisponde alla composizione di applicazioni.

Prop. *Date $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n,\ell}(\mathbb{K}) \Rightarrow L_{AB} = L_A \circ L_B$*

Dim. $AB \in M_{m,\ell}(\mathbb{K}) \Rightarrow L_{AB} : \mathbb{K}^\ell \to \mathbb{K}^m$.
Abbiamo anche $L_B : \mathbb{K}^\ell \to \mathbb{K}^n$ e $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \Rightarrow L_A \circ L_B : \mathbb{K}^\ell \to \mathbb{K}^m$.
$L_{AB}(X) = ABX = L_A(L_B(X)) = (L_A \circ L_B)(X)$, $\forall\, X \in \mathbb{K}^\ell$. $\square$

Oss. $L_{I_n} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$.

Oss. $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \Rightarrow L_{A^{-1}} = (L_A)^{-1}$.
Infatti $L_A \circ L_{A^{-1}} = L_{AA^{-1}} = L_{I_n} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$ e similmente $L_{A^{-1}} \circ L_A = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$.

Teor. *$A \in M_n(\mathbb{K})$ invertibile $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rg}\, A = n$.*

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \Rightarrow L_A : \mathbb{K}^n \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^n$ iso $\Rightarrow \mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, L_A = n$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\mathcal{E}_n = (e_1, \dots, e_n)$ base canonica di $\mathbb{K}^n$. $\mathrm{rg}\, A = n \Rightarrow \mathrm{rg}(A \mid e_j) = n \Rightarrow$ $AX = e_j$ sistema compatibile con un'unica soluzione $B_j \in \mathbb{K}^n$ (Teorema di Rouché-Capelli) $\Rightarrow B = (B_1 \ \cdots \ B_n) \in M_n(\mathbb{K})$ inversa di A. $\square$

Calcolo della matrice inversa

Dalla dimostrazione si ottiene un metodo per il calcolo dell'inversa.
$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \rightsquigarrow A^{-1}$ si determina applicando Gauss alla matrice $(A \mid I_n)$, portando A a gradini e poi applicando di nuovo Gauss a ritroso per ottenere I_n nelle prime n colonne. Le colonne restanti formano A^{-1}.

$$(A \mid I_n) \overset{\text{Gauss}}{\rightsquigarrow} (I_n \mid A^{-1}).$$