Teorema di determinazione

Teor. *Dati V e W $\mathbb{K}$-spazi vettoriali, $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ base per V e $w_1, \dots, w_n \in W$ vettori arbitrari $\Rightarrow \exists!$ applicazione lineare*

$$f : V \to W \quad t.c.$$

$$\begin{cases} f(b_1) = w_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ f(b_n) = w_n \end{cases}$$

Dim. $\boxed{\textit{Unicità}}$ Sia $f : V \to W$ lineare t.c. $f(b_i) = w_i$, $\forall\, i = 1, \dots, n$.
$\forall\, v \in V \rightsquigarrow v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i \Rightarrow f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(b_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i$.
Le coordinate $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ di v rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono uniche $\Rightarrow f(v)$ ha l'unico possibile valore dato dalla formula

$$f(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i$$

e quindi f, se esiste, è unica.

$\boxed{\textit{Esistenza}}$ L'ultima formula suggerisce la definizione di f:

$$f : V \to W$$

$$f(v) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i, \quad \text{con } v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i.$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathcal{B}}, \dots, b_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{\mathcal{B}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(b_1) = w_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ f(b_n) = w_n. \end{cases}$$

Resta da dimostrare che f è lineare.
$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$ e $u = \sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i \Rightarrow v + u = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) b_i \Rightarrow$
$f(v+u) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) w_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i w_i = f(v) + f(u)$.

$\beta \in \mathbb{K} \Rightarrow \beta v = \sum_{i=1}^{n} \beta \alpha_i b_i \Rightarrow f(\beta v) = \sum_{i=1}^{n} \beta \alpha_i w_i = \beta \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i = \beta f(v)$. $\square$

Cor. *Siano V e W di dimensione finita. Allora $V \cong W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$.*

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ Corollario della Lezione 20 (Invarianza della dimensione).

$\boxed{\Leftarrow}$ $\dim V = \dim W = n$, $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ base per V e $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ base per $W \rightsquigarrow f : V \to W$ lineare t.c. $f(b_i) = c_i$, $\forall\, i \Rightarrow f$ isomorfismo perché f manda una base in una base. $\square$

Cor. *$V \cong \mathbb{K}^n \Leftrightarrow \dim V = n$.*

Oss. $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ base per V, $\mathcal{E}_n = (e_1, \ldots, e_n)$ base can. per $\mathbb{K}^n$

$$\Gamma_{\mathcal{B}} \colon V \to \mathbb{K}^n \quad \text{isomorfismo t.c.}$$
$$\Gamma_{\mathcal{B}}(b_i) = e_i, \quad \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i \Rightarrow \Gamma_{\mathcal{B}}(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Quindi $\Gamma_{\mathcal{B}}$ associa a $v \in V$ le sue coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Oss. Viceversa, dato un isomorfismo $\Gamma \colon V \to \mathbb{K}^n$, con $\dim V = n$, resta determinata una base per V data dai vettori $b_i = \Gamma^{-1}(e_i)$, $i = 1, \ldots, n$, e abbiamo $\Gamma_{\mathcal{B}} = \Gamma$. Scegliere una base per V è la stessa cosa che scegliere un isomorfismo $V \cong \mathbb{K}^n$.

Matrici di applicazioni lineari

V e W $\mathbb{K}$-spazi vettoriali con $\dim V = n$ e $\dim W = m$.
$f \colon V \to W$ applicazione lineare. Scegliamo basi
$\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ per V
$\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_m)$ per $W \rightsquigarrow f(b_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i \rightsquigarrow A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$
A è costruita per colonne: $A_{(j)}$ è la colonna delle coordinate di $f(b_j)$.

$$v \in V \rightsquigarrow v = \sum_{j=1}^{n} x_j b_j = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^{\mathcal{B}}$$

$$\begin{aligned} f(v) &= \sum_{j=1}^{n} x_j f(b_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) c_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} y_i c_i = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}^{\mathcal{C}}, \quad \text{con } y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j. \end{aligned}$$

Poniamo ora

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

f si rappresenta in coordinate con l'equazione

$$f \colon \; Y = AX$$

quindi A permette di calcolare f in coordinate. Scriviamo anche

$$f(X) = AX.$$

Def. A si chiama *matrice di f rispetto alle basi $\mathcal{B}$* e $\mathcal{C}$. Si indica con $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$.

Viceversa, fissate le basi e data $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, ponendo $f(X) = AX$ resta definita un'applicazione lineare $f : V \to W$. Abbiamo quindi il teorema.

Teor. *Scelte le basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ risp. per V e W, c'è una biiezione tra applicazioni lineari $f : V \to W$ e matrici $m \times n$, che associa a f la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$.*

N.B. Questo ha senso solo se sono fissate basi per dominio e codominio. Senza basi non si associa niente.

N.B. Se $f : V \to V$ è un endomorfismo (lineare con stesso dominio e codominio), spesso useremo la stessa base $\mathcal{B}$ sia nel dominio che nel codominio $\rightsquigarrow M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \in M_n(\mathbb{K})$.

Oss. $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V) = I_n$ perché $\mathrm{id}_V(b_j) = b_j$, $j = 1, \ldots, n$.

Applicazioni lineari $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$. Usiamo le basi canoniche su $\mathbb{K}_n$ e $\mathbb{K}^m$
$\forall\, f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ lineare $\rightsquigarrow A = M_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{E}_m}(f) \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \Rightarrow$

$$f(X) = AX = L_A(X).$$

Quindi $f = L_A$. Abbiamo dimostrato il teorema seguente.

Teor. *Le applicazioni lineari $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ sono del tipo L_A con $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$.*

Oss. $\forall\, A \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \Rightarrow M_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{E}_m}(L_A) = A$ perché $L_A(e_j) = Ae_j = A_{(j)}$.