Matrice dell'applicazione composta

V, W, U spazi vettoriali su $\mathbb{K}$, $\dim V = n$, $\dim W = m$, $\dim U = \ell$

$\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ base per V con coordinate $X = (x_1, \dots, x_n)$

$\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$ base per W con coordinate $Y = (y_1, \dots, y_m)$

$\mathcal{D} = (d_1, \dots, d_\ell)$ base per U con coordinate $Z = (z_1, \dots, z_\ell)$

Applicazioni lineari

$$\begin{array}{ccc} f : V \to W & g : W \to U & g \circ f : V \to U \\ A = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f) & B = M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}}(g) & C = M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(g \circ f) \\ m \times n & \ell \times m & \ell \times n \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & W \arrow[r, "g"] & U \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Y \arrow[r, mapsto, "g"] & BY \\ X \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[ddrr, bend right, mapsto, "g \circ f"'] & AX \arrow[r, mapsto, "g"] & BAX \arrow[d, equal] \\ & C = BA & CX \\ & & \end{tikzcd}$$

$$M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(g \circ f) = M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}}(g) \cdot M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f)$$

Matrici di isomorfismi

$\dim V = \dim W = n$

$\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ base per V

$\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ base per W

$f : V \to W$ isomorfismo

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_V \;\Rightarrow\; M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f^{-1}) \cdot M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V) = I_n$$

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_W \;\Rightarrow\; M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f^{-1}) = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_W) = I_n$$

Dunque $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f) \in M_n(\mathbb{K})$ è invertibile e si ha

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f^{-1}) = \big(M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f)\big)^{-1}$$

Cor. *$A \in M_n(\mathbb{K})$ invertibile $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rg}\, A = n$ (rango massimo).*

Matrice del cambio di base

$\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ base per V con coordinate $X = (x_1, \dots, x_n)$

$\mathcal{B}' = (b'_1, \dots, b'_n)$ altra base per V con coordinate $X' = (x'_1, \dots, x'_n)$

$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ si chiama *matrice del cambio di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$*.

$$X' = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V) \cdot X$$

Oss. La matrice del cambio di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ ha come j-esima colonna le coordinate di b_j rispetto alla base $\mathcal{B}'$.

N.B. Una matrice del cambio di base è sempre quadrata e *invertibile*.

Cambio di base per applicazioni lineari

$f : V \to W$ lineare, $\dim V = n$, $\dim W = m$
$\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$, $\mathcal{B}' = (b'_1, \dots, b'_n)$ basi per V
$\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$, $\mathcal{C}' = (c'_1, \dots, c'_m)$ basi per W

$$f = \mathrm{id}_W \circ f \circ \mathrm{id}_V$$

$$V \xrightarrow{f} W$$

$$\mathcal{B} \quad M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f) \quad \mathcal{C}$$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V) \qquad\qquad M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}(\mathrm{id}_W)$$

$$\mathcal{B}' \quad M^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{B}'}(f) \quad \mathcal{C}'$$

$$\boxed{M^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{B}'}(f) = M^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_W) \cdot M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V)}$$

Cambio di base per gli endomorfismi. $f : V \to V$ endomorfismo. Consideriamo due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ per V. Poniamo $\mathcal{C} = \mathcal{B}$ e $\mathcal{C}' = \mathcal{B}'$.

$$V \xrightarrow{f} V$$

$$\mathcal{B} \quad M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \quad \mathcal{B}$$

$$\mathcal{B}' \quad M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f) \quad \mathcal{B}'$$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V)$$

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f) = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V)$$

Poniamo $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$, $A' = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f) \in M_n(\mathbb{K})$, $P = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
Ricordiamo che

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V) = \left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V)\right)^{-1}$$
$$A' = P^{-1}AP$$

Def. Due matrici $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ sono *simili* se $\exists\, P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ t.c.

$$B = P^{-1}AP.$$

Oss. I_n è simile solo a sé stessa: $P^{-1}I_nP = P^{-1}P = I_n$, $\forall\, P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
Analogamente la matrice nulla $0 \in M_n(\mathbb{K})$ è simile solo a sé stessa.

Prop. *$A, A' \in M_n(\mathbb{K})$ rappresentano lo stesso endomorfismo rispetto a due basi se e solo se A e A' sono simili.*

Oss. $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ simili $\Rightarrow \mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, B$.

Nucleo e immagine. Per trovare il nucleo di $f : V \to W$ in coordinate, si fissano basi $\mathcal{B}$ per V e $\mathcal{C}$ per W $\rightsquigarrow$ $A = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f)$ e si risolve il sistema

$$\ker f : \; AX = 0_{\mathbb{K}^m}.$$

Lo spazio delle soluzioni di questo sistema omogeneo rappresenta $\ker f$.
Lo spazio delle colonne di A, ossia $\mathrm{span}(A_{(1)}, \dots, A_{(n)})$, rappresenta $\mathrm{im}\, f$.

$$\mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg}\, A.$$