Determinante

Matrici di ordine 2. Data una matrice quadrata di ordine 2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$$

vogliamo capire in quali casi $\operatorname{rg} A = 2$. Per semplicità supponiamo $a \neq 0$. Con Gauss abbiamo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \overset{III}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d - \dfrac{bc}{a} \end{pmatrix} \overset{II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rg} A = 2 \Leftrightarrow ad - bc \neq 0.$$

Caso generale. Definiremo una funzione $\det : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, chiamata *determinante*, che ad ogni matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{K})$ associa uno scalare $\det A \in \mathbb{K}$. Vogliamo che tale funzione abbia le seguenti proprietà:

0) $\det I_n = 1$

1) $\det A' = -\det A$, se A' si ottiene da A scambiando due righe

2) $\det A' = \alpha \det A$, se A' si ottiene da A moltiplicando una riga per $\alpha \in \mathbb{K}$

3) $\det A' = \det A$, se A' si ottiene da A con oper. element. tipo III.

4) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{rg} A = n$ (rango massimo).

La definizione di det è *ricorsiva*: definiamo prima det sugli scalari (matrici di ordine 1). In secondo luogo, supponendo di saper calcolare det su matrici di ordine $n-1$, lo definiamo sulle matrici di ordine $n \geqslant 2$.

Per ogni $A \in M_n(\mathbb{K})$ e per ogni $i, j = 1, \dots, n$, indichiamo con $A_{\widehat{ij}}$ la matrice di ordine $n-1$ ottenuta da A cancellando la riga i e colonna j.

N.B. Non confondere $A_{\widehat{ij}} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ con $A_{ij} \in \mathbb{K}$, l'entrata (i,j) di A.

$\underline{n=1}$. $\det(a) \overset{\text{def}}{=} a$, $\forall\, a \in M_1(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$.

$\underline{n \geqslant 2}$. Supponiamo di aver definito det per le matrici di ordine $n-1 \geqslant 1$. Data una matrice $A = (a_{ij})$ di ordine $n \geqslant 2$ poniamo

$$\det A = |A| \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{\widehat{1j}}.$$

$\underline{n=2}$. Riotteniamo la formula ricavata all'inizio.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$\underline{n=3}$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Prop. $\det A = \det {}^tA$.

Matrici triangolari. $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ è *triangolare superiore* se le entrate sotto la diagonale principale sono nulle, ossia $a_{ij} = 0$, $\forall\, i > j$.

Similmente A è *triangolare inferiore* se le entrate sopra la diagonale principale sono nulle, ossia $a_{ij} = 0$, $\forall\, i < j$.

Oss. A a gradini $\not\Leftarrow\Rightarrow$ A triangolare superiore.

Oss. A triangolare superiore $\Leftrightarrow$ ${}^tA$ triangolare inferiore.

Esempio. La matrice seguente è triangolare superiore ma non a gradini.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Se $A \in M_n(\mathbb{K})$ è triangolare inferiore, dalla definizione si ha

$$\det A = a_{11} \cdots a_{nn}$$

prodotto delle entrate sulla diagonale principale, perché $a_{1j} = 0$, $\forall\, j > 1$. Questo vale per tutte le matrici triangolari, inferiori o superiori (in particolare per matrici diagonali), dato che det non cambia per trasposizione.

Calcolo di det mediante Gauss. In genere è conveniente usare le proprietà *(0)*—*(3)* per calcolare det, riducendo la matrice a gradini (quindi triangolare).

Se A' a gradini è ottenuta da A mediante operazioni elementari di tipo I e III (attenzione! non II) allora

$$\det A = (-1)^k \det A'$$

dove k è il numero di operazioni di tipo I che sono state utilizzate (ciascuna operazione di tipo I fa cambiare il segno a det). D'altra parte con operazioni di tipo II si possono fare semplificazioni per esempio raccogliendo un coefficiente da una riga o colonna.