Formule di Laplace

Cofattori o complementi algebrici. Data $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$, il *cofattore* o *complemento algebrico* dell'entrata di posto (i, j) di A è

$$\mathrm{cof}_{ij}(A) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{i+j} \det A_{\widehat{ij}} \in \mathbb{K}.$$

La *matrice cofattore* di A è

$$\mathrm{cof}(A) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathrm{cof}_{ij}(A)) \in M_n(\mathbb{K}).$$

Formule di Laplace. Per ogni $i = 1, \ldots, n$ si ha lo *sviluppo di* $\det A$ *secondo la i-esima riga*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \,\mathrm{cof}_{ij}(A).$$

Per ogni $j = 1, \ldots, n$ si ha lo *sviluppo di* $\det A$ *secondo la j-esima colonna*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \,\mathrm{cof}_{ij}(A).$$

Oss. La formula ricorsiva usata per definire det è lo sviluppo di Laplace secondo la prima riga.

Conviene sviluppare $\det A$ secondo la riga o colonna col maggior numero di entrate nulle.

Teorema di Binet

Teor. $\forall\, A, B \in M_n(\mathbb{K}) \Rightarrow \det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Cor. $\forall\, A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \Rightarrow \det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

Dim. $1 = \det I_n = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$, da cui la tesi. □

Cor. *Matrici simili hanno lo stesso determinante.*

Dim. $\det(P^{-1}AP) = \det(P)^{-1}\det(A)\det(P) = \det(A)$. □

Matrice inversa

Teor. $\forall\, A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ *si ha* $A\,{}^t\mathrm{cof}(A) = (\det A) I_n$.

Dim. Dimostriamo che $(A\,{}^t\mathrm{cof}(A))_{ij} = ((\det A)I_n)_{ij}$, $\forall\, i, j = 1, \ldots, n$.

$\boxed{i = j}$

$$\begin{aligned}(A\,{}^t\mathrm{cof}(A))_{ii} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} ({}^t\mathrm{cof}(A))_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \,\mathrm{cof}_{ik}(A) \qquad \text{(Laplace su riga } i\text{)} \\ &= \det A = ((\det A)I_n)_{ii}\end{aligned}$$

$\boxed{i \neq j}$ Consideriamo la matrice $B \in M_n(\mathbb{K})$ ottenuta da A duplicando la riga i-esima al posto della j-esima

$$B^{(k)} = \begin{cases} A^{(k)}, & \text{se } k \neq j \\ A^{(i)}, & \text{se } k = j \end{cases}$$

B ha due righe uguali $B^{(i)} = B^{(j)} = A^{(i)} \Rightarrow \det B = 0$.
$A_{\widehat{jk}} = B_{\widehat{jk}} \Rightarrow \mathrm{cof}_{jk}(A) = \mathrm{cof}_{jk}(B)$ perché la riga j viene cancellata.

$$\begin{aligned}(A\,{}^t\mathrm{cof}(A))_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}({}^t\mathrm{cof}(A))_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\mathrm{cof}_{jk}(A) \\ &= \sum_{k=1}^{n} b_{jk}\,\mathrm{cof}_{jk}(B) \qquad \text{(Laplace su riga } j\text{)} \\ &= \det B = 0 = ((\det A)I_n)_{ij}.\end{aligned}$$ □

Cor. $\det A \neq 0 \Rightarrow A \in \mathrm{GL}_n(K)$ *e* $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\,{}^t\mathrm{cof}\,A$.

Dim. $A\left(\frac{1}{\det A}\,{}^t\mathrm{cof}\,A\right) = I_n$. □

Cor. *Data* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *si ha* $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{rg}\,A = n$.

Teorema di Cramer

Un sistema lineare

$$AX = B$$

con $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ e $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, ha l'unica soluzione

$$X = A^{-1}B$$

che si ottiene moltiplicando a sinistra entrambi i membri per A^{-1}.
Il teorema seguente fornisce una formula per calcolare la soluzione.

Teor. *Siano* $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *e* $B \in \mathbb{K}^n$. *La soluzione del sistema lineare*

$$AX = B$$

è data da

$$x_i = \frac{\det \widehat{A}_i}{\det A} \qquad \forall\, i = 1, \dots, n$$

dove $\widehat{A}_i$ *è la matrice ottenuta da* A *sostituendo* B *al posto della* i*-esima colonna.*

Dim. $X = A^{-1}B$ da cui si ha:

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_{k=1}^n (A^{-1})_{ik} b_k = \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^n ({}^t\mathrm{cof}(A))_{ik} b_k \\ &= \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^n b_k \,\mathrm{cof}(A)_{ki} \\ &= \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^n b_k \,\mathrm{cof}(\widehat{A}_i)_{ki} \qquad \text{(Laplace su colonna } i\text{)} \\ &= \frac{\det \widehat{A}_i}{\det A}. \end{aligned}$$

□

Calcolo del rango col determinante

Def. Un *minore* di ordine r di una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ è il determinante di una sottomatrice quadrata di A di ordine r.

Teor (di Kronecker)**.** $\operatorname{rg} A = r \Leftrightarrow$ *A ha un minore di ordine r non nullo e ogni minore di ordine $r+1$ ottenuto aggiungendo una riga e una colonna è nullo.*

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

quindi $\operatorname{rg} A = 2$.