Determinante come funzione multilineare

Una matrice $n \times n$ è essenzialmente una n-upla ordinata di vettori colonna di $\mathbb{K}^n$, ossia $A = (v_1, \ldots, v_n)$ con $v_i = A_{(i)}$.

$$\det : M_n(\mathbb{K}) = \underbrace{\mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n}_{n \text{ volte}} \to \mathbb{K}$$

è funzione delle colonne di una matrice. Si può dimostrare che det soddisfa le seguenti proprietà (dove ci sono ... non modifichiamo nulla):

$$\det(\ldots, v + w, \ldots) = \det(\ldots, v, \ldots) + \det(\ldots, w, \ldots)$$
$$\det(\ldots, \alpha v, \ldots) = \alpha \det(\ldots, v, \ldots).$$

In altre parole det è lineare rispetto a ciascuna colonna, tenendo fisse le altre. Per questo motivo si dice che det è *multilineare nelle colonne*, ossia è lineare rispetto a ciascuna colonna.

Dato che $\det A = \det {}^t\!A$ si ha che det è *multilineare nelle righe*.

Spazio delle applicazioni lineari

Definiamo lo *spazio delle applicazioni lineari* da V a W

$$\mathrm{Hom}(V, W) \overset{\text{def}}{=} \{f : V \to W \mid f \text{ lineare}\}$$

Date applicazioni lineari $f, g : V \to W$ definiamo la *somma*

$$f + g : V \to W$$
$$(f + g)(v) \overset{\text{def}}{=} f(v) + g(v)$$

e la *moltiplicazione scalare* per $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\alpha f : V \to W$$
$$(\alpha f)(v) \overset{\text{def}}{=} \alpha f(v).$$

È facile dimostrare che $f + g$ e αf sono lineari e con queste operazioni $\mathrm{Hom}(V, W)$ è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

$\mathcal{B} = (b_1 \ldots, b_n)$ base per V
$\mathcal{C} = (c_1 \ldots, c_m)$ base per W
$\forall f, g \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $\forall \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow$

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f + g) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) + M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(g)$$
$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\alpha f) = \alpha M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$$

Prop. $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \colon \mathrm{Hom}(V, W) \to M_{m,n}(\mathbb{K})$, $f \mapsto M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$, *è un isomorfismo.*

$M_{m,n}(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{mn} \Rightarrow \dim M_{m,n}(\mathbb{K}) = mn \Rightarrow \dim \mathrm{Hom}(V, W) = \dim V \dim W$.

Definiamo lo *spazio degli endomorfismi* di V

$$\mathrm{End}(V) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}(V, V) = \{f : V \to V \mid f \text{ lineare}\}.$$

$\mathrm{End}(V)$ è uno spazio vettoriale e $\dim \mathrm{End}(V) = (\dim V)^2$.

Determinante di un endomorfismo

Def. Sia $f \in \mathrm{End}(V)$ e sia $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ una base per V. Si chiama *determinante* di f il numero

$$\det f \stackrel{\text{def}}{=} \det M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathbb{K}.$$

Oss. Il determinante di un endomorfismo è definito come il determinante di una sua matrice rispetto ad una base arbitraria di V, usando la *stessa base* sia nel dominio che nel codominio.

Oss. $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ altra base per $V \Rightarrow \det M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) = \det M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ perché sono matrici simili. Quindi $\det f$ è ben definito (non dipende dalla base).

Oss. $f, g \in \mathrm{End}(V) \Rightarrow \det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$ (Teorema di Binet).

Oss. f isomorfismo $\Leftrightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det f \neq 0$. $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det f}$.

Prop. *Sia* $f \in \mathrm{End}(V)$ *e* $0 \neq \dim V < \infty$. *Allora* $\ker f \neq 0_V \Leftrightarrow \det f = 0$.

Problema della diagonalizzazione

Dato $f \in \mathrm{End}(V)$ vorremmo trovare una base $\mathcal{D} = (v_1, \dots, v_n)$ per V t.c. $M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{D}}(f)$ sia la più semplice possibile: una matrice diagonale.

Def. $f \in \mathrm{End}(V)$ è *diagonalizzabile* se esiste una base $\mathcal{D}$ per V t.c. $M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{D}}(f)$ sia una matrice diagonale. $\mathcal{D}$ è detta *base diagonalizzante*.

Ricordando che la i-esima colonna di $M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{D}}(f)$ è il vettore delle coordinate di $f(v_i)$ si ha subito la seguente proposizione.

Prop. $\mathcal{D} = (v_1, \dots, v_n)$ *base diagonalizzante* $f \Leftrightarrow \exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ *t.c.*

$$f(v_i) = \lambda_i v_i, \quad \forall\, i = 1, \dots, n.$$

Inoltre $M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{D}}(f) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Oss. Se $M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{D}}(f) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ allora f si scrive in coordinate come

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix}$$

Autovalori e autovettori

Def. Dato $f \in \mathrm{End}(V)$, uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ è detto *autovalore* di f se esiste un vettore *non nullo* $v \in V$ t.c. $f(v) = \lambda v$. In questo caso v è detto *autovettore per* f *relativo all'autovalore* λ.

Oss. $v \in V$ autovettore per $f \Leftrightarrow v \neq 0_V$ e $\exists\, \lambda \in \mathbb{K}$ t.c. $f(v) = \lambda v$.

N.B. Vogliamo $v \neq 0_V$ perché altrimenti la definizione sarebbe banale: per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ si ha $f(0_V) = \lambda 0_V$.

Cor. *Una base per* V *diagonalizza* $f \in \mathrm{End}(V) \Leftrightarrow$ *è formata da autovettori.*

Polinomio caratteristico

Supponiamo $\dim V = n < \infty$.

Def. Il *polinomio caratteristico* di $f \in \operatorname{End}(V)$ è $p_f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \det(f - x\,\mathrm{id}_V)$.

Def. Il *polinomio caratteristico* di $A \in M_n(\mathbb{K})$ è $p_A(x) \stackrel{\text{def}}{=} \det(A - xI_n)$.

Oss. p_A è un polinomio di grado n perché si esprime mediante prodotti e somme di entrate della matrice

$$A - xI_n = \begin{pmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-x \end{pmatrix}$$

Il prodotto delle entrate sulla diagonale principale è l'unico termine da cui scaturisce $(-1)^n x^n$ (gli altri termini sono monomi di grado $< n$). Quindi $p_A(x)$ ha grado n e coefficiente direttore $(-1)^n = \pm 1$.
Il termine noto è $p_A(0) = \det A$.

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad p_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ -1 & 3-x \end{vmatrix} = (1-x)(3-x) + 2$$

$$p_A(x) = x^2 - 4x + 5.$$

Prop. *Sia $f : V \to V$ endomorfismo di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V. Allora $\lambda \in \mathbb{K}$ è autovalore di $f \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{K}$ è radice di p_f, ossia $p_f(\lambda) = 0$.*

Dim. $\lambda \in \mathbb{K}$ autovalore di $f \Leftrightarrow \exists\, v \in V$ non nullo t.c.
$f(v) = \lambda v \Leftrightarrow (f - \lambda\,\mathrm{id}_V)(v) = 0_V \Leftrightarrow \ker(f - \lambda\,\mathrm{id}_V) \neq \{0_V\} \Leftrightarrow$
$p_f(\lambda) = \det(f - \lambda\,\mathrm{id}_V) = 0$. □

Prop. *$\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ base per V e $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \Rightarrow p_f(x) = p_A(x)$. Quindi p_f è un polinomio di grado $n = \dim V$.*

Dim. $p_f(x) = \det(f - x\,\mathrm{id}_V) = \det M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f - x\,\mathrm{id}_V) = \det(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) - xM^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V))$
$= \det(A - xI_n) = p_A(x)$. □

N.B. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gli autovalori di $f \in \operatorname{End}(V)$ sono le radici *reali* di p_f.
Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ si considerano tutte le radici di p_f.