Molteplicità algebrica e geometrica

Supponiamo che V sia un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale con $1 \leqslant \dim V = n < \infty$.

Def. La *molteplicità algebrica* $m_a(\lambda)$ di un autovalore λ è la molteplicità di λ come radice del polinomio caratteristico $p_f(x)$.

Oss. $p_f(x)$ divisibile per $(x-\lambda)^{m_a(\lambda)}$ e non divisibile per $(x-\lambda)^{m_a(\lambda)+1}$.

Oss. $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ autovalori distinti di $f \in \mathrm{End}(V)$, $m_i = m_a(\lambda_i) \Rightarrow$

$$p_f(x) = (-1)^n (x-\lambda_1)^{m_1} \cdots (x-\lambda_k)^{m_k} g(x)$$

con $g(x)$ polinomio senza radici in $\mathbb{K}$ ($g = 1$ se p_f ha tutte le radici in $\mathbb{K}$).

Oss. $m_a(\lambda_1) + \cdots + m_a(\lambda_k) \leqslant \dim V$ e $= \Leftrightarrow p_f$ ha tutte le radici in $\mathbb{K}$.

Def. La *molteplicità geometrica* $m_g(\lambda)$ di un autovalore λ è la dimensione del corrispondente autospazio, ossia $m_g(\lambda) \overset{\text{def}}{=} \dim \mathrm{Aut}(\lambda)$.

Oss. $m_g(\lambda) = \dim V - \mathrm{rg}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda I_n)$, $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$.

Valgono le disuguaglianze seguenti (la prima e l'ultima per definizione)

$$1 \leqslant m_g(\lambda) \leqslant m_a(\lambda) \leqslant \dim V.$$

Oss. $m_g(\lambda_1) + \cdots + m_g(\lambda_k) \leqslant \dim V$.

Teor. $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ *autovalori distinti di* $f \in \mathrm{End}(V)$ *con autovettori rispettivamente* $v_1, \dots, v_k \in V \Rightarrow v_1, \dots, v_k$ *linearmente indipendenti.*

Dim. Per ipotesi $f(v_i) = \lambda_i v_i$. Procediamo per induzione su $k \geqslant 0$.
<u>*Base dell'induzione:* $k = 1$</u>. Evidente perché $v_1 \neq 0_V$.

<u>*Ipotesi induttiva: vero per* $k-1 \geqslant 1$</u>. Consideriamo una qualunque combinazione lineare nulla di $v_1 \dots, v_k$ e mostriamo che è banale.

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = 0_V \Rightarrow 0_V = f\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(v_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i v_i =$$
$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i v_i - \underbrace{\lambda_k \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i}_{0_V} = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_k) v_i.$$

Ipotesi induttiva $\Rightarrow \alpha_i(\lambda_i - \lambda_k) = 0$, $\forall\, i = 1, \dots, k-1$.
$\lambda_i \neq \lambda_k$, $\forall\, i \leqslant k-1 \Rightarrow \alpha_i = 0$, $\forall\, i \leqslant k-1 \Rightarrow \alpha_k v_k = 0_V \Rightarrow \alpha_k = 0$. □

Teorema di diagonalizzazione. *Siano* $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ *gli autovalori distinti di* f. *Le seguenti sono equivalenti:*
1) p_f *ha tutte le radici in* $\mathbb{K}$ *e* $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)\ \forall\, i$.

2) $m_g(\lambda_1) + \cdots + m_g(\lambda_k) = \dim V$.

3) f *diagonalizzabile.*

In questo caso, scelta $\mathcal{D}_i$ *base per* $\mathrm{Aut}(\lambda_i)\ \forall\, i \Rightarrow \mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{D}_k$ *base diagonalizzante per* f.

Dim. $\boxed{1) \Rightarrow 2)}$ $\sum_{i=1}^{k} m_g(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{k} m_a(\lambda_i) = \dim V$ (vedi osservazione sopra).

$\boxed{2) \Rightarrow 1)}$ $\dim V = \sum_{i=1}^{k} m_g(\lambda_i) \leqslant \sum_{i=1}^{k} m_a(\lambda_i) \leqslant \dim V \Rightarrow$ tutte uguaglianze.

$\boxed{2) \Rightarrow 3)}$ $\mathcal{D} = (v_1, \dots, v_n)$ insieme di autovettori.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = u_1 + \cdots + u_k = 0_V$$

con u_j somma dei termini $\in \mathrm{Aut}(\lambda_j) \Rightarrow u_j = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \Rightarrow \mathcal{D}$ base.

$\boxed{3) \Rightarrow 2)}$ $\mathcal{D}$ base diagonalizzante (formata da autovettori), n_i numero di autovettori di $\mathcal{D}$ che appartengono a $\mathrm{Aut}(\lambda_i) \Rightarrow n_i \leqslant m_g(\lambda_i)$.
$\dim V = \sum_{i=1}^{k} n_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} m_g(\lambda_i) \leqslant \dim V \Rightarrow$ tutte uguaglianze. □

Cor. *Se f ha $n = \dim V$ autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \Rightarrow f$ diagonalizzabile. In questo caso $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i) = 1$, $\forall\, i = 1, \dots, n$.*

Oss. p_f ha una radice $\lambda \notin \mathbb{K} \Rightarrow f$ non diagonalizzabile.

Metodo per diagonalizzare un endomorfismo

Dato $f \in \mathrm{End}(V)$ con $\dim(V) = n$ per capire se f è diagonalizzabile e trovare una base diagonalizzante si procede come segue:
1) si sceglie (se già non è data) una base $\mathcal{B}$ per V;

2) si determina $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$;

3) si calcola $p_f(x) = p_A(x) = \det(A - xI_n)$;

4) si calcolano le radici distinte $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ di $p_f(x)$;

5) se $\lambda_i \notin \mathbb{K}$ o $m_g(\lambda_i) < m_a(\lambda_i)$ per un certo $\lambda_i \Rightarrow f$ non diagonalizzabile;

6) altrimenti per ogni λ_i si risolve il sistema omogeneo

$$(A - \lambda_i I_n)X = 0_{\mathbb{K}^n}$$

trovando una base $\mathcal{D}_i$ per lo spazio delle soluzioni $\mathrm{Aut}(\lambda_i)$;

7) $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{D}_k$ base diagonalizzante.

Se al punto (*4*) non abbiamo verificato la disuguaglianza, si contano i vettori ottenuti al punto (*6*): se il numero è uguale a $\dim V$ abbiamo base diagonalizzante. Altrimenti f non è diagonalizzabile.

In pratica si lavora sempre su A, ossia si *diagonalizza una matrice*.

Esempio. Diagonalizziamo $L_A\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad p_A(x) = x^2 - 4x + 5, \;\; \lambda_1 = 2+i, \;\; \lambda_2 = 2-i$$

$$\lambda_1) \quad \begin{pmatrix} -1-i & 2 \\ -1 & 1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0, \quad -x + (1-i)y = 0 \quad \begin{cases} x = (1-i)t \\ y = t \end{cases}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} \text{ base di } \operatorname{Aut}(2+i)$$

$$\lambda_2) \quad \begin{pmatrix} -1+i & 2 \\ -1 & 1+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0, \quad -x + (1+i)y = 0 \quad \begin{cases} x = (1+i)t \\ y = t \end{cases}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix} \text{ base di } \operatorname{Aut}(2-i)$$

$\mathcal{D} = (v_1, v_2)$ base diagonalizzante $D = M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{D}}(L_A) = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = M^{\mathcal{E}_2}_{\mathcal{D}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}), \;\; D = P^{-1}AP.$

Oss. $L_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ non è diagonalizzabile perché non ha autovalori reali.

Esempio. Diagonalizziamo $L_B\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad p_B(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 & -1 \\ -1 & 2-x & -1 \\ 1 & -1 & 2-x \end{vmatrix} = -x^3 + 4x^2 - 5x + 2$$

Si cercano le radici calcolando p_B sui divisori di 2 e si fattorizza.

$$p_B(x) = -(x-1)^2(x-2)$$
$$\lambda_1 = 1, \;\; m_a(1) = 2$$
$$\lambda_2 = 2, \;\; m_a(2) = 1$$

$$B - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \;\; \operatorname{rg}(B - I_3) = 1 \Rightarrow m_g(1) = 2$$

$$B - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \;\; \operatorname{rg}(B - 2I_3) = 2 \Rightarrow m_g(2) = 1$$

L_B diagonalizzabile. Calcoliamo basi degli autospazi.

$$1) \quad x - y + z = 0 \qquad \begin{cases} x = t - u \\ y = t \\ z = u \end{cases} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \;\; v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2) \quad \begin{cases} -x - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -t \end{cases} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(v_1, v_2) base per Aut(1); v_3 base per Aut(2)
$\mathcal{D} = (v_1, v_2, v_3)$ base diagonalizzante per L_B.

$$D = M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}}(L_B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ P = M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{E}_3}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = P^{-1}BP \qquad B = PDP^{-1}$$

Esempio. Proviamo a capire se $L_J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è diagonalizzabile

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad p_J(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^2, \ \lambda = 1, \ m_a(1) = 2$$

$$J - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ \mathrm{rg}(J - I_2) = 1 \Rightarrow m_g(1) = 2 - 1 = 1 < m_a(1)$$

$L_J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ non è diagonalizzabile.
$L_J : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ non è diagonalizzabile (per lo stesso motivo).