Forme bilineari

Da questo momento V sarà uno *spazio vettoriale reale* ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Def. Una *forma bilineare* su V è una funzione

$$\begin{aligned} b\colon V \times V &\to \mathbb{R} \\ (v, w) &\mapsto b(v, w) \end{aligned}$$

che sia lineare in ciascun argomento, ossia $\forall\, u, v, w \in V$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ si ha

1) $b(u + v, w) = b(u, w) + b(v, w)$

2) $b(u, v + w) = b(u, v) + b(u, w)$

3) $b(\alpha v, w) = b(v, \alpha w) = \alpha b(v, w)$.

Oss. $b(0_V, v) = b(v, 0_V) = 0$. Infatti $b(0_V, v) = b(00_V, v) = 0b(0_V, v) = 0$.

Def. $b\colon V \times V \to \mathbb{R}$ è *simmetrica* se $b(v, w) = b(w, v)$, $\forall\, v, w \in V$.

Def. $b\colon V \times V \to \mathbb{R}$ è *definita positiva* se $b(v, v) > 0$, $\forall\, v \in V - \{0_V\}$.

N.B. $b(0_V, 0_V) = 0$.

Def. Un *prodotto scalare* su V è una forma bilineare, simmetrica, definita positiva $b\colon V \times V \to \mathbb{R}$. Scriviamo $b(v, w) = \langle v, w \rangle$ (leggi v *scalare* w). Uno *spazio vettoriale Euclideo* è uno spazio vettoriale reale V con un prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$.

Forma bilineare associata ad una matrice quadrata.

$$A \in M_n(\mathbb{R}) \rightsquigarrow b_A\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$b_A(X, Y) \overset{\text{def}}{=} {}^tXAY,\ \forall\, X, Y \in \mathbb{R}^n \quad \text{(vettori colonna)}.$$

b_A bilineare per la proprietà distributiva del prodotto righe per colonne.

Def. b_A è detta *forma bilineare associata ad* $A \in M_n(\mathbb{R})$.

$$A = (a_{ij}) \rightsquigarrow b_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

Oss. b_A simmetrica $\Leftrightarrow$ A simmetrica, ossia $A = {}^tA$. Infatti: $\forall\, X, Y \in \mathbb{R}^n$
$b_A(X, Y) = b_A(Y, X) \Leftrightarrow {}^tXAY = {}^tYAX = {}^t({}^tYAX) = {}^tX\,{}^tAY \Leftrightarrow A = {}^tA$.

N.B. Non confondere la forma bilineare e l'applicazione lineare associata

$$b_A\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad L_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Prodotto scalare canonico su $\mathbb{R}^n$. Forma bilineare associata a I_n.

$$\langle\ ,\ \rangle = b_{I_n}\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\langle X, Y \rangle = {}^tXY = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

$\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$, $\forall\, X, Y \in \mathbb{R}^n$ (simmetrica).
$\langle X, X \rangle = x_1^2 + \cdots + x_n^2 > 0$, $\forall\, X \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ (definita positiva).

Def. Una matrice quadrata simmetrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ è *definita positiva* se $b_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una forma bilineare simmetrica definita positiva.

Oss. $A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica $\Rightarrow b_A(X, X) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij}x_i x_j$.

Esempio. I_n definita positiva perché induce il prodotto scalare canonico.

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b_A simmetrica perché $A = {}^tA$. Abbiamo

$${}^tXAY = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

b_A definita positiva infatti

$$\begin{aligned} {}^tXAX &= 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = \\ &= x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 > 0, \quad \forall X \in \mathbb{R}^2 - \{0\}. \end{aligned}$$

Quindi A definisce un prodotto scalare (non canonico) su $\mathbb{R}^2$.

Def. Un *minore principale* di $A \in M_n(\mathbb{R})$ è il det di una sottomatrice quadrata formata dalle prime p righe e colonne di A, con $1 \leqslant p \leqslant n$.

Un altro metodo per verificare se A è definita positiva è il seguente.

Prop. *Una matrice simmetrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ è definita positiva $\Leftrightarrow$ tutti i minori principali di A sono > 0.*

Oss. $A \in M_2(\mathbb{R})$ simmetrica è definita positiva $\Leftrightarrow a_{11} > 0$ e $\det A > 0$.

Matrice di una forma bilineare. $b : V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineare $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_n)$ base per $V \rightsquigarrow \rightsquigarrow M_{\mathcal{C}}(b) \overset{\text{def}}{=} (b(c_i, c_j)) \in M_n(\mathbb{R})$.

Def. $M_{\mathcal{C}}(b)$ è detta *matrice di b rispetto alla base $\mathcal{C}$*.

$$\begin{aligned} &A = M_{\mathcal{C}}(b),\ a_{ij} = b(c_i, c_j),\ v = X^{\mathcal{C}},\ w = Y^{\mathcal{C}} \in V \rightsquigarrow \\ &b(v, w) = b\left(\sum_{i=1}^{n} x_i c_i, \sum_{j=1}^{n} y_j c_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j b(c_i, c_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = {}^tXAY = b_A(X, Y). \end{aligned}$$

$M_{\mathcal{C}}(b)$ consente di calcolare b in coordinate mediante b_A.

Matrice di b_A rispetto alla base canonica. $A \in M_n(\mathbb{R}) \rightsquigarrow$ $b_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $b_A(X, Y) = {}^tXAY \Rightarrow M_{\mathcal{E}_n}(b_A) = A$.

Prop. $b : V \times V \to \mathbb{R}$ *prod. scal.* $\Leftrightarrow$ $M_{\mathcal{C}}(b)$ *simmetrica definita positiva.*

Matrici congruenti

Def. Due matrici $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ sono *congruenti* se $\exists\, P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ t.c.

$$B = {}^tPAP.$$

Oss. Matrici congruenti hanno lo stesso rango.

N.B. Non confondere congruenza $B = {}^tPAP$ e similitudine $B = P^{-1}AP$.

Cambio di base per forme bilineari

Teor. *$b\colon V \times V \to \mathbb{R}$ bilineare, $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ basi per V $\Rightarrow$*

$$M_{\mathcal{C}'}(b) = {}^tM^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}(\mathrm{id}_V) \cdot M_{\mathcal{C}}(b) \cdot M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}(\mathrm{id}_V).$$

Dim. $A = M_{\mathcal{C}}(b)$, $A' = M_{\mathcal{C}'}(b)$, $P = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}(\mathrm{id}_V)$. $\forall\, v, w \in V$ con coordinate

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^{\mathcal{C}} = X^{\mathcal{C}}, \qquad w = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}^{\mathcal{C}} = Y^{\mathcal{C}} \text{ rispetto a } \mathcal{C}$$

$$v = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}^{\mathcal{C}'} = (X')^{\mathcal{C}'}, \qquad w = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}^{\mathcal{C}'} = (Y')^{\mathcal{C}'} \text{ rispetto a } \mathcal{C}'$$

$$X = PX', \qquad Y = PY'$$

$$b(v, w) = {}^tXAY = {}^t(PX')A(PY') = {}^tX'\,{}^tPAP\,Y' = {}^tX'A'Y' \Rightarrow A' = {}^tPAP.$$

$\square$

Cor. *Due matrici A e $A' \in M_n(\mathbb{K})$ rappresentano la stessa forma bilineare su V rispetto a due basi opportune $\Leftrightarrow$ A e A' sono congruenti.*