Spazi vettoriali Euclidei

V spazio vettoriale Euclideo con prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$.

Def. Si chiama *norma* o *lunghezza* di un vettore $v \in V$ il numero

$$\|v\| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

Oss.

1) $\|v\|$ ben definita perché $\langle\ ,\ \rangle$ definito positivo: $\langle v, v\rangle \geqslant 0$.

2) $\|v\| \geqslant 0$, $\forall\, v \in V$ e $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0_V$.

3) $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$.

4) $\langle v, v\rangle = \|v\|^2$.

5) $v \neq 0_V \Rightarrow \left\|\dfrac{v}{\|v\|}\right\| = 1$. $\dfrac{v}{\|v\|} \in V$ è detto *normalizzazione* di v.

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. *$\forall\, v, w \in V$ si ha*

$$|\langle v, w\rangle| \leqslant \|v\|\|w\|.$$

Vale l'uguaglianza $\Leftrightarrow$ v e w sono linearmente dipendenti.

Dim. Se $w = 0_V$ vale l'uguale. Supponiamo $w \neq 0_V \rightsquigarrow \alpha := -\dfrac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}$

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \langle v + \alpha w, v + \alpha w\rangle = \langle v, v\rangle + \langle v, \alpha w\rangle + \langle \alpha w, v\rangle + \langle \alpha w, \alpha w\rangle \\ &= \|v\|^2 + 2\alpha\langle v, w\rangle + \alpha^2\|w\|^2 = \|v\|^2 - 2\frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}\langle v, w\rangle + \frac{\langle v, w\rangle^2}{\|w\|^4}\|w\|^2 \\ &= \|v\|^2 - \frac{\langle v, w\rangle^2}{\|w\|^2} \Rightarrow \langle v, w\rangle^2 \leqslant \|v\|^2\|w\|^2 \Rightarrow |\langle v, w\rangle| \leqslant \|v\|\|w\|. \end{aligned}$$

Non dimostriamo l'ultima affermazione. □

Disuguaglianza triangolare per la norma. $\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$.

Dim.
$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w\rangle = \|v\|^2 + 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2 \leqslant \\ &\leqslant \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2. \end{aligned}$$
□

Metrica Euclidea. La *metrica* o *distanza Euclidea* su V è la funzione

$$d \colon V \times V \to \mathbb{R}$$
$$d(v, w) \overset{\text{def}}{=} \|v - w\|.$$

Proprietà della metrica. *Valgono le seguenti $\forall\, u, v, w \in V$*

1) $d(v, w) \geqslant 0$ *e* $d(v, w) = 0 \Leftrightarrow v = w$.

2) $d(v, w) = d(w, v)$.

3) $d(u, w) \leqslant d(u, v) + d(v, w)$ *(disuguaglianza triangolare per d).*

Dim. (*1*)$-$(*2*) sono immediate. Dimostriamo la (*3*):

$$d(u, w) = \|u - v + v - w\| \leqslant \|u - v\| + \|v - w\| = d(u, v) + d(v, w).$$ □

Oss. $d(v, 0_V) = \|v\|$.

Angolo convesso tra due vettori non nulli. $\forall\, v, w \in V - \{0_V\} \Rightarrow$

$$-1 \leqslant \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\|w\|} \leqslant 1 \;\Rightarrow\; \exists!\, \vartheta \in [0, \pi] \text{ t.c. } \cos\vartheta = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\|w\|}$$

Def. ϑ si chiama *angolo tra* v e w. Scriviamo $\vartheta = \widehat{vw}$.

$$\boxed{\widehat{vw} \overset{\text{def}}{=} \arccos \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\|w\|}} \qquad \boxed{\langle v, w\rangle = \|v\|\|w\| \cos \widehat{vw}}$$

N.B. L'angolo non è definito se uno dei vettori è nullo.

Def. $v, w \in V$ sono *ortogonali* se $\langle v, w\rangle = 0$. Scriviamo $v \perp w$.

Oss. Supponiamo $v, w \in V - \{0_V\}$.

1) $\widehat{vw} = 0 \Leftrightarrow \exists\, \alpha > 0$ t.c. $v = \alpha w$ (*angolo nullo*).

2) $0 < \widehat{vw} < \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \langle v, w\rangle > 0$ (*angolo acuto*).

3) $\widehat{vw} = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \langle v, w\rangle = 0$ (*angolo retto*).

4) $\dfrac{\pi}{2} < \widehat{vw} < \pi \Leftrightarrow \langle v, w\rangle < 0$ (*angolo ottuso*).

5) $\widehat{vw} = \pi \Leftrightarrow \exists\, \alpha > 0$ t.c. $v = -\alpha w$ (*angolo piatto*).

Spazi vettoriali Euclidei numerici

Consideriamo $\mathbb{R}^n$ col prodotto scalare canonico

$$\langle v, w\rangle = {}^t v\, w = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \qquad v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$d(v, w) = \|v - w\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \qquad w = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\widehat{vw} = \arccos \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\|w\|}$$

Esempio. Consideriamo in $\mathbb{R}^2$ col prodotto scalare canonico i vettori $v = (1, 2)$, $w = (-2, 1) \Rightarrow \|v\| = \|w\| = \sqrt{5}$, $\langle v, w\rangle = 0 \Rightarrow \widehat{vw} = \dfrac{\pi}{2}$ $d(v, w) = \|v - w\| = \sqrt{10}$.

Esempio. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ col prodotto scalare canonico i vettori $v = (-1, 0, 1)$, $w = (0, 1, 1) \Rightarrow \|v\| = \|w\| = \sqrt{2}$, $\langle v, w\rangle = 1 \Rightarrow \widehat{vw} = \dfrac{\pi}{3}$ $d(v, w) = \|v - w\| = \sqrt{2}$.