# Basi ortonormali

$V$ spazio vettoriale Euclideo con prodotto scalare $\langle\, ,\rangle$.

**Prop.** *Siano $v_1, \dots, v_k \in V$ a due a due ortogonali e non nulli. Allora $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti.*

*Dim.* Per ipotesi $\langle v_i, v_j\rangle = 0$, $\forall\, i \neq j$.

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0_V$$

$$\langle v_i, \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k\rangle = \alpha_i \langle v_i, v_i\rangle = \alpha_i \|v_i\|^2 = 0.$$

$\|v_i\| \neq 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$, $\forall\, i$, quindi sono linearmente indipendenti. □

**Def.** Una base $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ per V è *ortogonale* se $\langle b_i, b_j\rangle = 0$, $\forall\, i \neq j$. $\mathcal{B}$ è *ortonormale* se $\langle b_i, b_j\rangle = \delta_{ij}$, $\forall\, i, j = 1, \dots, n$.

**Oss.** $\mathcal{B}$ ortonormale $\Leftrightarrow M_{\mathcal{B}}(\langle\, ,\rangle) = I_n$.

**Oss.** Normalizzando una base ortogonale se ne ottiene una ortonormale.

**Oss.** La base canonica di $\mathbb{R}^n$ è ortonormale: $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$.

**Ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.** $v_1, \dots, v_n \in V$ *linearmente indipendenti* $\Rightarrow \exists\, u_1, \dots, u_n \in V$ *non nulli e a due a due ortogonali t.c.*

$$\operatorname{span}(v_1, \dots, v_k) = \operatorname{span}(u_1, \dots, u_k), \quad \forall\, k = 1, \dots, n.$$

*Dim.* Definiamo gli $u_k$ in modo ricorsivo e procediamo per induzione su $k$.

$$u_1 := v_1$$

$$u_k := v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, u_i\rangle}{\langle u_i, u_i\rangle} u_i \qquad \text{per } k \geqslant 2.$$

<u>*Ipotesi induttiva:*</u> per $i, j \leqslant k-1$, $i \neq j$ si ha $\langle u_i, u_j\rangle = 0$. Pertanto:

$$\langle u_k, u_j\rangle = \langle v_k, u_j\rangle - \frac{\langle v_k, u_j\rangle}{\langle u_j, u_j\rangle}\langle u_j, u_j\rangle = 0$$

$\operatorname{span}(u_1, \dots, u_{k-1}) = \operatorname{span}(v_1, \dots, v_{k-1}) \Rightarrow v_k \in \operatorname{span}(u_1, \dots, u_k)$ e $u_k \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_k) \Rightarrow \operatorname{span}(v_1, \dots, v_k) = \operatorname{span}(u_1, \dots, u_k)$, $u_k \neq 0_V$. □

**Oss.** I vettori $u_k$ possono essere moltiplicati per scalari non nulli preservando le proprietà dell'enunciato. Questo a volte semplifica i calcoli.

**Cor.** *$V$ spazio vett. Euclideo,* $\dim V < \infty \Rightarrow$ *$V$ ammette base ortonormale.*

**Esempio.** $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Normalizzando si ha la base ortonormale per $\mathbb{R}^2$

$$w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Esempio.** $U \subset \mathbb{R}^4$ sottospazio vettoriale di equazione

$$U\colon\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

Determiniamo una base di $U$.

$$\begin{cases} x_1 = t_1 - t_2 - t_3 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = t_2 \\ x_4 = t_3 \end{cases} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_2 - \frac{-1}{2} u_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = v_3 - \frac{-1}{2} u_1 - \frac{1}{6} u_2 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Per determinare una base ortonormale per $U$ basta normalizzare gli $u_i$.

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ w_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ w_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

# Calcoli mediante basi ortonormali

$\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ *base ortonormale* per $V$.

$$\langle v, w \rangle = {}^tXY = \langle X, Y \rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \qquad v = \sum_{i=1}^n x_i b_i \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$d(v, w) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \qquad w = \sum_{i=1}^n y_i b_i \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\widehat{vw} = \arccos \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|\,\|w\|}$$

$$x_i = \langle v, b_i \rangle, \quad v = \sum_{i=1}^n \langle v, b_i \rangle b_i.$$

Pertanto le formule per prodotto scalare, la norma, distanza rispetto ad una base ortonormale coincidono con le analoghe formule viste su $\mathbb{R}^n$ col prodotto scalare canonico. Le coordinate rispetto ad una base ortonormale sono i prodotti scalari con i vettori di base.

**Prop.** *$\forall A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica definita positiva $\Rightarrow \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ t.c. $A = {}^tPP$. Quindi* $\det A > 0$ *e* $\operatorname{rg} A = n$.

*Dim.* $b_A \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ prodotto scalare $\Rightarrow \exists \mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ base ortonormale $\Rightarrow M_{\mathcal{B}}(b_A) = I_n$ congruente ad $A \rightsquigarrow P = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_n}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ $\rightsquigarrow A = {}^tPI_nP = {}^tPP \Rightarrow \det A = (\det P)^2 > 0$. $\square$

**Esempio.** Consideriamo il prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ indotto dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo già visto quest'esempio e sappiamo che $A$ è definita positiva. La base canonica di $\mathbb{R}^2$ non è ortonormale. Usiamo Gram-Schmidt

$$u_1 = e_1$$
$$u_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\|u_1\| = \sqrt{2} \qquad b_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|u_2\| = \sqrt{{}^tu_2 A u_2} = \sqrt{2} \qquad b_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ base ortonormale $\Rightarrow A = {}^tPP$ con $P = (b_1 \ b_2)^{-1}$.

**Completamento della base ortonormale.** $\dim V = n$ *e* $u_1, \dots, u_k \in V$ *vettori ortonormali* $\Rightarrow \exists u_{k+1}, \dots, u_n \in V$ *t.c.* $(u_1, \dots, u_n)$ *base ortonormale per* $V$.

*Dim.* Completiamo $u_1, \dots, u_k$ ad una base per $V$ aggiungendo certi vettori $v_{k+1}, \dots, v_n$. Applicando Gram-Schmidt e normalizzazione a

$$u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n$$

i primi $k$ vettori non cambiano perché ortonormali tra loro $\rightsquigarrow u_1, \dots, u_n$ base ortonormale per $V$. $\square$

**Sottospazi vettoriali ortogonali.** Due sottospazi vettoriali $U, W \subset V$ sono *ortogonali* se $\langle u, w \rangle = 0$, $\forall u \in U$ e $\forall w \in W$. Scriviamo $U \perp W$.

**Oss.** $U \perp W \Leftrightarrow$ ogni vettore di $U$ è ortogonale ad ogni vettore di $W$.

**Complemento ortogonale.** $U \subset V$ sottospazio vettoriale

$$U^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid \langle v, u \rangle = 0, \ \forall u \in U\}$$

**Def.** $U^\perp$ è detto *complemento ortogonale* o anche solo *ortogonale* di $U$.

**Oss.** $U \cap U^\perp = \{0_V\}$. Infatti $\forall v \in U \cap U^\perp \Rightarrow \langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v = 0_V$.

**Teor.** *$U^\perp \subset V$ è il più grande sottospazio vettoriale di $V$ ortogonale a $U$.*

*Dim.* $0_V \in U^\perp$ dato che $\langle 0_V, u \rangle = 0$. $\forall v, w \in U^\perp$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall u \in U \Rightarrow$

$$\langle \alpha v + \beta w, u \rangle = \alpha \langle v, u \rangle + \beta \langle w, u \rangle = 0 \Rightarrow \alpha v + \beta w \in U^\perp \qquad \square$$